EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA

DINSDAG 10 JANUARI 2023

EERSTE BACHELOR FYSICA & STERRENKUNDE

- Je beschikt over **4 uur** om dit examen op te lossen. Lees de opgaven grondig voor je begint, denk rustig na en schrijf je antwoord zo duidelijk mogelijk op.
- Je antwoorden komen op het geruite papier. Theorie en oefeningen worden **apart ingediend** en per oefening neem je een nieuw geruit blad. Zorg dat op elk blad je **naam** staat en dien ook een blad in als je een opgave niet maakt. De blanco papieren zijn kladpapier en hoef je niet in te dienen.
- Alle **nota's** mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een **verwijzing** volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt. Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle **voorgaande deeltjes**, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Het gebruik van een rekentoestel is **verboden**, evenals het gebruik van smartphone, tablet en andere elektronische toestellen. Deze zijn uitgeschakeld en liggen niet bij je. Elke **poging tot spieken** kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Leg je **studentenkaart** klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- **Veel succes!**

Opgave 1. (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen gerelateerd aan de cursusnota's in detail te verklaren. In wat volgt is V een K-vectorruimte, met $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

(i) Zij $S \subseteq V$. In Definitie 2.2.8 voeren we de span van S in. Toon aan dat we de span ook hadden kunnen definiëren als de doorsnede van alle deelruimten van V die S bevatten, m.a.w., toon aan dat

$$\mathsf{span}(S) \subseteq \bigcap_{S \subseteq W \leq V} W \subseteq \mathsf{span}(S).$$

(ii) Leg uit waarom het toepassen van elementaire rijoperaties de rang van een matrix invariant laat (zie Lemma 5.1.6(ii)). Leg ook uit hoe we dit kunnen gebruiken om de rang te bepalen.

(iii) In het bewijs van Lemma 6.3.9 is $f: V \to V$ een lineaire operator en is $\{v_1, ..., v_r\}$ een basis van de eigenruimte bij een eigenwaarde λ. Leg uit waarom de matrixvoorstelling van f, t.o.v een basis $B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots\}$ er als volgt uitziet:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Oplossing.

(i) Zij W een deelruimte die S bevat. Elk element s van $\mathsf{span}(S)$ is een lineaire combinatie van elementen uit S en dus uit W en aangezien W een deelruimte is geldt $s \in W$. Omgekeerd, $\bigcap_{S \subseteq W \leq V} W \subseteq W$ voor elke deelruimte W die S bevat, in het bijzonder voor de deelruimte $\mathsf{span}(S)$ (zie Lemma 2.2.9). De gelijkheid volgt.

Veelgemaakte fouten: Deze vraag is vermoedelijk de lastigste vraag op het examen geweest. Velen geraakten hier in de knoop, en sloegen deelverzamelingen en deelruimten door elkaar.

(ii) De rang van een matrix is per definitie de dimensie van de ruimte opgespannen door de rijen $R_1, ..., R_m$. Deze span zelf is gedefinieerd als de verzameling van alle mogelijke lineaire combinaties $\alpha_1 R_1 + \cdots \alpha_m R_m$. Als we twee rijen van plaats wisselen komt dat neer op twee termen van plaats wisselen en verandert er niets aan de som. Als we R_i vervangen door cR_i met $c \neq 0$ dan kunnen we dit opvangen door α_i te vervangen door $\alpha_i c^1$ en is er ook niets veranderd aan de som. Als we R_i vervangen door $R_i + cR_j$ dan kunnen we dit ook weer opvangen door α_j te vervangen door $\alpha_j - \alpha_i c$ en verandert de som ook weer niet. Elementaire rij-operaties laten dus de ruimte opgespannen door de rijen invariant, en daarom ook de dimensie. Als we elementaire rij-operaties toepassen tot we een rij-echelon matrix bekomen, dan kunnen we de rang aflezen door het aantal spillen te tellen.

Veelgemaakte fouten: Deze vraag is vermoedelijk de vraag geweest waarvan de opgave het vaakst fout gelezen werd (toegegeven, er was enige verwarring mogelijk, dus we zijn mild geweest). Het was de bedoeling dat je voor elk van de drie types elementaire rij-operaties werkelijk naging dat de span van de rijen hierdoor niet veranderde. Ik heb ook een paar keer gelezen dat een rij ofwel LO ofwel LA is, maar LO/LA slaat hier altijd op **een verzameling van rijen.**

(iii) Om aan de matrixvoorstelling te komen zetten we in de i-de kolom de coördinaatvector van het beeld van de i-de basisvector. Als v_j een van de eerste r vectoren is dan geldt er dat $f(v_j) = \lambda v_j$ en de corresponderende coördinaatvector is dus λe_j met e_j de j-de standaardbasisvecor. Dit verklaart de vorm van de eerste r kolommen van A. De overige kolommen zijn algemeen. **Veelgemaakte fouten:** Het nulgedeelte linksonderaan werd soms vergeten, terwijl het meteen over de eerste r kolommen gaat en niet enkel over het deel linksboven.

Opgave 2. (2 punten) Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$ met $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zij λ een eigenwaarde van A. Toon aan dat λ ook een eigenwaarde is van A^t en toon aan dat de meetkundige multipliciteit van λ dezelfde is voor beide matrices.

(ii) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix B met 1 als een van de eigenwaarden, waarbij bovendien B en B^t een verschillende eigenruimte hebben bij deze eigenwaarde.

Oplossing.

(i) λ is een eigenwaarde van A als $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Nu is $\det(\lambda I_n - A) = \det((\lambda I_n - A)^t) = \det(\lambda I_n - A^t)$ en dus is λ ook een eigenwaarde van A^t. De meetkundige multipliciteit van λ voor A is de dimensie van de eigenruimte. De eigenruimte wordt gegeven door de oplossingsverzameling van het stelsel $(\lambda I_n - A)X = 0$. De meetkundige multipliciteit is dus $n - \mathsf{rk}(\lambda I_n - A)$. Nu is $\mathsf{rk}(\lambda I_n - A) = \mathsf{rk}(\lambda I_n - A^t)$ en dus zijn de meetkundige multipliciteiten gelijk.

Veelgemaakte fouten: Ik heb hier een paar keer te veel gelezen dat $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I) - \det(A)$. Dat is vals! Vaak werd ook de meetkundige multipliciteit vergeten, of indien niet, werd er niet vermeld wat het verband is tussen de oplossingenverzameling van het stelsel $(\lambda I_n - A)X = 0$ en de rang (dat laatste is maar een klein foutje natuurlijk, maar moeilijk voor ons om in te schatten of jullie het weten en niet opschrijven of gewoon optimistisch zijn).

(ii) Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dan is 1 een eigenwaarde van zowel A als A^t. De eigenruimte bij deze eigenwaarde is $\mathsf{span}((1,0)^t)$ voor A en $\mathsf{span}((1,-1)^t)$ is deze bij A^t.

Algemene tip: deze vraag werd overwegend goed beantwoord, al komen sommige studenten met ingewikkelde voorbeelden. Dat is ok, maar het kost allicht meer tijd. Dus probeer efficiënt na te denken bij voorbeelden: je weet dat het beeld van $(1,0)^t$ in de eerste kolom van A komt. Dus je kan inbouwen dat $(1,0)$ een eigenvector is met eigenwaarde 1 door de eerste kolom van A te kiezen als $(1,0)^t$.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken waar of vals? Beargumenteer je antwoord (indien je een tegenvoorbeeld hebt, volstaat dit voor "vals"). (Enkel "waar" of "vals" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ met $n > 1$. Als $AB = AC$ dan is $B = C$.

(ii) Stel dat $\{v_1, v_2, v_3\}$ een voortbrengende verzameling is voor de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{R}^3$. Zij $A \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$. Dan is $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ een lineair onafhankelijke verzameling.

(iii) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een inverteerbare matrix. Dan is $A^k \neq 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Oplossing.

(i) **Vals.** Nee, bijvoorbeeld als $A = 0$ dan is $AB = AC$ waar voor elke twee matrices B en C. **Veelgemaakte fouten:** Ook hier waren de tegenvoorbeelden soms ingewikkelder dan nodig. Velen hebben zich ook laten vangen en dachten dat dit waar was, soms omdat er aangenomen werd dat A inverteerbaar is (dat is nochtans niet gegeven), soms omdat men ervan maakte $A(B - C) = 0$ dus $B = C$, terwijl er nuldelers zijn bij matrices.

(ii) **Waar.** Als $\{v_1, v_2, v_3\}$ voortbrengend is, dan is het ook een basis want het bevat 3 elementen en de dimensie van $\mathbb{R}^3$ is 3 (zie ook stelling 2.4.12). nu is $\{Av_1, Av_2, Av_3\} = \{L_A(v_1), L_A(v_2), L_A(v_3)\}$, met $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$. Aangezien L_A bijectief is omdat $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$ (waarbij we gebruiken dat A inverteerbaar is), volgt uit Stelling 3.3.1 dat $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ ook een basis is en dus in het bijzonder lineair onafhankelijk. **Veelgemaakte fouten:** Deze vraag werd overwegend goed beantwoord, als er fouten waren dan was dat dikwijls omdat er echt problemen zijn bij de concepten lineaire onafhankelijkheid en voortbrengendheid, we kunnen alleen maar aanmoedigen om de definities goed onder de knie te hebben.

(iii) **Waar.** Als $A^k = 0$ dan is $\det(A^k) = \det(A)^k = 0$ en dus is $\det(A) = 0$. Dit is equivalent met A niet inverteerbaar. **Veelgemaakte fouten:** Men dacht vaak dat $A^k = 0$ alleen maar kan als $A = 0$, of als A nulrijen heeft etc. Dit is niet waar, neem bijvoorbeeld de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, dan is $A^2 = 0$.

Opgave 4. (3 punten) Beschouw de reële vectorruimte $M_2(\mathbb{R})$ met basis

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

alsook de deelruimte V van $\mathbb{R}[x]$ bestaande uit alle veeltermen van graad ten hoogste 3 met basissen

$$\mathcal{C}_1 := \left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\} \quad \text{en} \quad \mathcal{C}_2 := \left\{1, x, x^2, x^3\right\}.$$

(i) Bepaal de basis $\mathcal{B}_2$ van $M_2(\mathbb{R})$ als je weet dat P de transitiematrix is van $\mathcal{B}_1$ naar $\mathcal{B}_2$ met

$$P := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bepaal de transitiematrix Q van $\mathcal{C}_2$ naar $\mathcal{C}_1$.

(iii) Zij f een lineaire afbeelding van $M_4(\mathbb{R})$ naar V met de volgende matrixvoorstelling t.o.v. de basissen $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{C}_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrixvoorstelling van f t.o.v. de basissen $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{C}_2$.

Oplossing.

(i) De kolommen van P beschrijven je telkens welke lineaire combinatie je moet nemen van de basiselementen van $\mathcal{B}_1$ om de elementen van $\mathcal{B}_2$ te bekomen:

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$Q \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 5. (5 punten) Zij f een lineaire operator die inwerkt op de vectorruimte van reële veeltermen van graad ten hoogste 2 als volgt:

$$f : a + bx + cx^2 \mapsto -a - (6a + 3b + 6c)x + (3a + b + 2c)x^2.$$

(i) Stel de matrixvoorstelling A_f op van f ten opzichte van de standaardbasis $\{1, x, x^2\}$.

(ii) Bewijs dat A_f diagonaliseerbaar is en bepaal een diagonaalmatrix D en een transitiematrix P zodat $D = P^{-1}A_fP$.

(iii) Bereken $f^{2023}(x)$.

Oplossing. De matrix A_f ziet er als volgt uit:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke veelterm $\chi_f(\lambda)$ is gelijk aan

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda+3 & 6 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2.$$

De eigenwaarden zijn dus 0 en -1 met corresponderende algebraïsche multipliciteiten 1 en 2. Om diagonaliseerbaarheid na te gaan dient de meetkundige multipliciteit horende bij eigenwaarde -1 te worden gecontroleerd. Gezien we toch P moeten opstellen, kunnen we evengoed alle eigenruimtes berekenen.

Beschouw eigenwaarde 0. Dan moeten we een homogeen lineair stelsel oplossen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ééndimensionale eigenruimte die hierbij hoort is $\{(0, 2r, -r)^t : r \in \mathbb{R}\}$, een basis van eigenvectoren is $\{(0, 2, -1)^t\}$.

Beschouw nu eigenwaarde -1. Dan moeten we een homogeen lineair stelsel oplossen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Op dit punt weten we reeds dat de bijhorende oplossingenverzameling tweedimensionaal is, dus de matrix is diagonaliseerbaar. De tweedimensionale eigenruimte die hierbij hoort is $\{(r, -3r-3s, s)^t : r, s \in \mathbb{R}\}$, een basis van eigenvectoren is $\{(1, -3, 0)^t, (0, -3, 1)^t\}$.

Dus $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, bijvoorbeeld. Heel wat variaties zijn mogelijk.

Tot slot, waaraan is $f^{2023}(x)$ gelijk? Wel, x heeft t.o.v. de standaardbasis coördinaatvector $(0,1,0)^t$, dus haar beeld heeft coördinaatvector

$$\begin{aligned} A_f^{2023}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &= (PDP^{-1})^{2023}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= PD^{2023}P^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dus $f^{2023}(x) = x^2 - 3x$.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 6. (2 punten) Zij L_A een lineaire operator op $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd door de *orthogonale* matrix

$$A = \begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9}\\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

(i) Toon aan dat de rang van $9I_3 - 9A$ gelijk is aan 2.

(ii) Waarom volgt uit (i) dat L_A een rotatie voorstelt?

Oplossing. De uitgebreide matrix horende bij $(9I_3 - 9A)X = 0$ is

$$\begin{pmatrix}[ccc|c]5 & -8 & -1 & 0\\ 4 & 8 & -8 & 0\\ -7 & 4 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

R_2 vervangen door $5R_2 - 4R_3$ en R_3 vervangen door $5R_3 + 7R_1$ geeft

$$\begin{pmatrix}[ccc|c]5 & -8 & -1 & 0\\ 0 & 72 & -36 & 0\\ 0 & -36 & 18 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}[ccc|c]5 & -8 & -1 & 0\\ 0 & 72 & -36 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

De rang van deze matrix, en bijgevolg ook van $9I_3 - 9A$, is gelijk aan 2. De oplossingsverzameling hiervan is dus ééndimensionaal. Deze oplossingsverzameling is tevens de verzameling van alle vectoren v waarvoor geldt dat $v = Av$ dus gefixeerd worden door L_A. Aangezien A orthogonaal is en een ééndimensionale fixruimte heeft, gaat het hier daadwerkelijk over een rotatie en geen reflectie of een combinatie van de twee.

Voor de geïnteresseerde lezer: de as waarrond geroteerd wordt heeft richtingscoëfficiënt $(2, 1, 2)^t$ en de hoek waarover wordt geroteerd, in tegenwijzerzin, is $\frac{3\pi}{2}$ oftewel 135°.