EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN MEETKUNDE I

DINSDAG 10 JANUARI 2023

EERSTE BACHELOR WISKUNDE

- Je beschikt over **4 uur** om dit examen op te lossen. Lees de opgaven grondig voor je begint, denk rustig na en schrijf je antwoord zo duidelijk mogelijk op.
- Je antwoorden komen op het geruite papier. Theorie en oefeningen worden **apart ingediend** en per oefening neem je een nieuw geruit blad. Zorg dat op elk blad je **naam** staat en dien ook een blad in als je een opgave niet maakt. De blanco papieren zijn kladpapier en hoef je niet in te dienen.
- Alle **nota's** mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een **verwijzing** volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt. Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle **voorgaande deeltjes**, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Het gebruik van een rekentoestel is **verboden**, evenals het gebruik van smartphone, tablet en andere elektronische toestellen. Deze zijn uitgeschakeld en liggen niet bij je. Elke **poging tot spieken** kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Leg je **studentenkaart** klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- **Veel succes!**

Opgave 1. (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen gerelateerd aan de cursusnota's in detail te verklaren. In wat volgt is V een K-vectorruimte, met K een veld.

(i) Zij $S \subseteq V$. In Definitie 2.2.8 voeren we de span van S in. Toon aan dat we de span ook hadden kunnen definiëren als de doorsnede van alle deelruimten van V die S bevatten, m.a.w., toon aan dat

$$\mathsf{span}(S) = \bigcap_{S \subseteq W \leq V} W.$$

(ii) In het bewijs van Lemma 6.3.9 is $f \colon V \to V$ een lineaire operator en is $\{v_1, ..., v_r\}$ een basis van de eigenruimte bij een eigenwaarde λ. Leg uit waarom de matrixvoorstelling van f, t.o.v een basis $B = \{v_1, \dots, v_r, \dots\}$ er als volgt uitziet:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

(iii) In het bewijs van Stelling 7.1.2 tonen we aan dat $\{1, f, f^2, \dots, f^{d-1}\}$ lineair onafhankelijk is en dat $f^d \in \mathsf{span}(\{1, f, f^2, \dots, f^{d-1}\})$. Leg uit waarom er volgt dat voor alle $k > d$ ook $f^k \in \mathsf{span}(\{1, f, f^2, \dots, f^{d-1}\})$ **en** waarom er hieruit volgt dat $K[f] = \mathsf{span}(\{1, f, f^2, \dots, f^{d-1}\})$.

(iv) Zij $\mathbb{R}^3$ de Euclidische ruimte en zij $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ en $w = (w_1, w_2, w_3)^t$ twee niet-nul vectoren uit $\mathbb{R}^3$. Stel $v \times w = 0$. Leg uit waarom dit betekent dat de onderstaande matrix rang 1 heeft **en** verklaar waarom hieruit volgt dat v en w lineair afhankelijk zijn.

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Oplossing.

(i) Zij W een deelruimte die S bevat. Elk element s van $\mathsf{span}(S)$ is een lineaire combinatie van elementen uit S en dus van elementen uit W, want $S \subseteq W$. Aangezien W een deelruimte is, volgt $s \in W$. Omgekeerd, $\bigcap_{S \subseteq W \leq V} W \subseteq W$ voor elke deelruimte W die S bevat, in het bijzonder voor de deelruimte $\mathsf{span}(S)$ (zie Lemma 2.2.9). De gelijkheid volgt.

Veelgemaakte fouten: Sommigen bewezen maar één van de twee richtingen, sommigen dachten dat S zelf een deelruimte was.

(ii) Om aan de matrixvoorstelling A te komen zetten we in de i-de kolom van A de coördinaatvector van het beeld van de i-de basisvector. Als v_j een van de eerste r vectoren is dan geldt er dat $f(v_j) = \lambda v_j$ en de corresponderende coördinaatvector is dus λe_j met e_j de j-de standaardbasisvecor. Dit verklaart de vorm van de eerste r kolommen van A. De overige kolommen zijn algemeen.

Veelgemaakte fouten: Er werd al eens vergeten te vermelden dat we werken met *coördinaatvectoren*, al zijn we hier mild in geweest. Af en toe werden de nullen onderaan vergeten ook.

(iii) Schrijf $S = \mathsf{span}(\{1, f, f^2, ..., f^{d-1}\})$. Stel we hebben aangetoond dat $f^k \in S$ met $k > d$ (en we weten dat $f^d \in S$). We tonen nu ook aan dat $f^{k+1} \in S$. Uit het gegeven volgt dat

$$f^k = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \cdots \lambda_{d-1} f^{d-1}$$

voor zekere $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1} \in K$. Dus

$$f^{k+1} = \lambda_0 \cdot f + \lambda_1 f^2 + \lambda_2 f^3 + \cdots \lambda_{d-2} f^{d-1} + \lambda_{d-1} f^d.$$

Aangezien $f^i \in S$ voor alle $0 \leq i \leq d$ en $\mathsf{span}(\{1, f, f^2, ..., f^{d-1}\})$ een deelruimte is, geldt er dat ook $f^{k+1} \in S$. De inductiebasis is $k = d+1$, waarbij het bovenstaande argument ook werkt omdat $f^d \in S$. Tot slot is $K[f] = \mathsf{span}(\{f^i \mid i \in \mathbb{N}\})$ per definitie. Aangezien $\{f^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ wegens het voorgaande, geldt ook dat $\mathsf{span}(\{f^i \mid i \in \mathbb{N}\}) \subseteq S$ aangezien S een deelruimte is. We krijgen dus $K[f] \subseteq S \subseteq K[f]$, waaruit de gelijkheid volgt.

Veelgemaakte fouten: Een van de dingen die vaak terugkwam was de redenering dat $f^k = f^{md+r}$ met $0 \leq r < d$, waarbij er dan vanuitgegaan werd dat $f^{dm} = f^{d^m}$ behoort tot de span omdat f^d erin zit. Mocht dit zo werken, dan zou f^k behoren tot $\mathsf{span}(f)$ voor elke k, wat niet het geval is. Het is hier dus essentieel om met *lineaire combinaties* te werken.

(iv) Als $v \times w = 0$ dan betekent dit dat elke twee kolommen van de gegeven matrix lineair afhankelijk zijn. De kolomrang van deze matrix is dus ten hoogste 1. Aangezien de rijrang gelijk is aan de kolomrang, en de rang slechts 0 is als de matrix 0 is, krijgen we dat de rang 1 is. We besluiten dat de rijen dus ook lineair afhankelijk zijn, wat wil zeggen dat v en w lineair afhankelijk zijn.

Veelgemaakte fouten: Deze vraag werd door heel wat studenten fout gelezen (het feit dat je het tweede gevraagde uit het eerste gevraagde moest bewijzen leidde tot verwarring. In het algemeen is het zeker een tip voor iedereen (het komt bij nog andere vragen ook voor) om de vragen echt goed te lezen, en ook volledig te beantwoorden.

Opgave 2. (2 punten) Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$ met $n \in \mathbb{N}$.

(i) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A met 1 als een van de eigenwaarden, waarbij bovendien A en A^t een verschillende eigenruimte hebben bij deze eigenwaarde.

(ii) Zij nu $A \in M_n(\mathbb{C})$. Bewijs dat A diagonaliseerbaar is als en slechts als A^t diagonaliseerbaar is.

(iii) Stel dat B een basis van eigenvectoren is voor A. Kan je hieruit zonder bijkomend rekenwerk een basis van eigenvectoren voor A^t halen? Motiveer je antwoord.

Oplossing.

(i) Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dan is 1 een eigenwaarde van zowel A als A^t. De eigenruimte bij deze eigenwaarde is $\mathsf{span}((1,0)^t)$ voor A en $\mathsf{span}((1,-1)^t)$ is deze bij A^t.

Algemene tip: deze vraag werd overwegend goed beantwoord, al komen sommige studenten met ingewikkelde voorbeelden. Dat is ok, maar het kost allicht meer tijd. Dus probeer efficiënt na te denken bij voorbeelden: je weet dat het beeld van $(1,0)^t$ in de eerste kolom van A komt. Dus je kan inbouwen dat $(1,0)$ een eigenvector is met eigenwaarde 1 door de eerste kolom van A te kiezen als $(1,0)^t$.

(ii) We geven twee manieren. **Methode 1.** We merken eerst op dat A en A^t dezelfde eigenwaarden hebben omdat hun karakteristieke vergelijking dezelfde is, $(xI_n - A)^t = xI_n - A$ en dus de determinant hiervan gelijk is. Een matrix over $\mathbb{C}$ is diagonaliseerbaar als de meetkundige multipliciteit gelijk is aan de algebraïsche multipliciteit voor elke eigenwaarde λ (de karakteristieke vergelijking heeft altijd genoeg wortels). Nu is de meetkundige multipliciteit λ gelijk aan de dimensie van de oplossingsverzameling van het stelsel $(\lambda I_n - A)X = 0$, en deze dimensie is $n - \mathsf{rk}(\lambda I_n - A)$. Aangezien $\mathsf{rk}(B) = \mathsf{rk}(B^t)$ voor elke matrix en $(\lambda I_n - A)^t = \lambda I_n - A$ geldt dat de meetkundige multipliciteit van λ gelijk is voor A en voor A^t. Dus als A inverteerbaar is, dan ook A^t, en omgekeerd.

Methode 2. De matrix A is diagonaliseerbaar als er een inverteerbare matrix P bestaat met $P^{-1}AP = D$ met D een diagonaalmatrix. Als we dit transponeren dan krijgen we $P^tA^tP^{-t} = D^t = D$. Merk op dat P inverteerbaar betekent dat ook P^t inverteerbaar is met inverse $(P^{-1})^t$. De matrix A^t is dus ook diagonaliseerbaar.

Veelgemaakte fout: Bij methode 2 werd vaak niet vermeld dat de matrix P inverteerbaar moet zijn. Hier zijn we mild in geweest, maar ik kan jullie zeker aanraden voor toekomstige examens om meer gedetailleerd te noteren.

(iii) Methode 2 geeft meteen ook het antwoord: een basis van eigenvectoren voor A^t kan gevonden worden als de de kolommen van P^{-t}, of dus, de rijen van P^{-1}. Om P^{-1} te bekomen is er nog wel wat rekenwerk nodig.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken waar of vals? Beargumenteer je antwoord (indien je een tegenvoorbeeld hebt, volstaat dit voor "vals"). (Enkel "waar" of "vals" antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(i) Zij V een eindigdimensionale K-vectorruimte en zij W_1, W_2 twee deelruimten van V met $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. Stel dat B_1 een basis is voor W_1 en B_2 een basis voor W_2 met $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Dan is $V = W_1 \oplus W_2$.

(ii) Zij V een K-vectorruimte en zij $f\colon V \to V$ een surjectieve lineaire operator. Dan is er een lineaire operator $g\colon V \to V$ verschillend van 0 met $g \circ f = 0$.

(iii) Als $A \in M_n(\mathbb{R})$ een matrix is met $\mathrm{rk}(A) < n$, dan bestaat er een matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ met $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A + B)$.

(iv) Zij W een affiene deelruimte van dimensie 1 (zie hoofdstuk 5) in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$. Dan is er een isometrie die de x-as op W afbeeldt.

Oplossing.

(i) **Vals.** We geven een tegenvoorbeeld. Neem $V = \mathbb{R}^2$ en stel $W_1 = W_2 = \mathsf{span}((1,0)^t)$. Dan zijn $B_1 = \{(1,0)\}$ en $B_2 = \{(2,0)\}$ basissen voor W_1 en W_2 die disjunct zijn. Maar $W_1 + W_2 = W_1$ is strikt bevat in V. **Veelgemaakte fouten:** Deze vraag werd minder goed beantwoord dan we gedacht hadden. Ze heeft misschien ook een beetje een strikvraag-gehalte. Wees voldoende kritisch.

(ii) **Vals.** Als g niet 0 is, dan is er een element $v \in V$ met $g(v) \neq 0$. Aangezien f surjectief is, is er een $w \in V$ met $f(w) = v$ en dus geldt er dat $g(f(w)) = g(v) \neq 0$. Dus als g verschillend van 0 is, dan is $g \circ f \neq 0$. **Veelgemaakte fouten:** Sommigen hebben hier f vrij gekozen als bijvoorbeeld de identieke operator. Dat was niet de bedoeling, f was algemeen.

(iii) **Waar.** Uit $\mathrm{rk}(A) < n$ volgt dat de kolommen $K_1, ..., K_n$ van A lineair afhankelijk zijn. Er is dus een kolom K_i die een lineaire combinatie is van de overige kolommen. Stel $\mathcal{K} = \{K_1, ..., K_n\} \setminus \{K_i\}$. Merk op dat $\mathsf{span}(\{K_1, ..., K_n\}) = \mathsf{span}(\mathcal{K})$ aangezien $K_i \in \mathsf{span}(\{K_1, ..., K_n\})$. Omdat $\dim(\mathsf{span}(\{K_1, ..., K_n\}) = \mathrm{rk}(A) < n$ is er een kolomvector K_i' die niet behoort tot $\mathsf{span}(\{K_1, ..., K_n\})$. Neem voor B de $n \times n$ matrix met als i-de kolom de vector $K_i' - K_i$, verder overal 0. Dan is de rang van $A + B$ groter dan die van A, aangezien $\dim(\mathsf{span}(\mathcal{K})) < \dim(\mathsf{span}(\mathcal{K} \cup \{K_i'\})$. **Veelgemaakte fouten:** Sommige studenten gaven een voorbeeld als bewijs voor "waar" ; dat werkt enkel als het een vals statement is.

(iv) **Waar.** Aangezien W een affiene deelruimte van dimensie 1 is, zijn er vectoren v en w (met $w \neq 0$ in $\mathbb{R}^3$ zo dat $W = v + \mathsf{span}(w)$. We kunnen een translatie gebruiken om W te verplaatsen naar een rechte door de oorsprong (namelijk $T_{-v}(W) = \mathsf{span}(w)$). Daarna gebruiken we een rotatie φ om $T_{-v}(W)$ te verplaatsen naar de x-as. Aangezien de isometrieën een groep vormen onder de samenstelling en zowel translaties als rotaties isometrieën zijn, zal $T_v \circ \varphi^{-1}$ de x-as afbeelden op W.

Veelgemaakte fouten: Soms werd vergeten dat een translatie ook een isometrie was. Deze vraag werd verrassend beter beantwoord dan gedacht.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 4. (3 punten) Zij $A \in M_n(K)$ ($n \in \mathbb{N}$, K een veld) een matrix van rang 1 met de eigenschap dat $A^2 \neq O$.

Los volgende deelvragen op (we noteren $\mathbf{0} \coloneqq 0_{K^n}$).

(i) Bepaal de dimensies van $\ker(L_A)$ en $\operatorname{im}(L_A)$ en bewijs dat er een basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bestaat voor K^n zodat $L_A(v_i) = \mathbf{0}$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

(ii) Definieer $w \coloneqq L_A(v_n)$. Bewijs dat $w \notin \ker(L_A)$.

(iii) Bewijs dat $\{v_1, \dots, v_{n-1}, w\}$ een basis is voor K^n.

Oplossing.

(i) Uit Lemma 5.1.6(i) volgt dat $\dim(\operatorname{im}(L_A)) = \operatorname{rk}(A) = 1$; uit de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen volgt dat $\dim(\ker(L_A)) = n - 1$.

Kies nu een basis $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ van $\ker(L_A)$ en een vector $v_n \notin \ker(L_A)$.

(ii) Stel, uit het ongerijmde, dat $w \in \ker(L_A)$. Dan volgt hieruit dat $L_{A^2}(v_n) = L_A(L_A(v_n)) = L_A(w) = \mathbf{0}$. Bovendien weten we dat $L_{A^2}(v_i) = L_A(L_A(v_i)) = L_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ voor alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dus L_{A^2} beeldt alle vectoren van de basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ uit (i) af op $\mathbf{0}$. Bijgevolg is L_{A^2} de nulafbeelding, wat strijdig is met $A^2 \neq O$.

(iii) Stel, uit het ongerijmde, dat het gegeven stel vectoren geen basis vormt van K^n. Uit punt (i) volgt dat $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ een stel lineair onafhankelijke vectoren zijn, dus moet er gelden dat $w \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$. Dit impliceert dat $L_A(w) \in \langle L_A(v_1), \dots, L_A(v_{n-1}) \rangle = \{\mathbf{0}\}$, m.a.w. dat $w \in \ker(L_A)$, wat strijdig is met (ii).

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 5. (5 punten) Zij f een lineaire operator die inwerkt op de vectorruimte van reële veeltermen van graad ten hoogste 2 als volgt:

$$f : a + bx + cx^2 \mapsto -a - (6a + 3b + 6c)x + (3a + b + 2c)x^2.$$

(i) Stel de matrixvoorstelling A_f op van f ten opzichte van de standaardbasis $\{1, x, x^2\}$.

(ii) Bewijs dat A_f diagonaliseerbaar is en bepaal een diagonaalmatrix D en een transitiematrix P zodat $D = P^{-1} A_f P$.

(iii) Bereken $f^{2023}(x)$.

Oplossing. De matrix A_f ziet er als volgt uit:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke veelterm $\chi_f(\lambda)$ is gelijk aan

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda+3 & 6 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2.$$

De eigenwaarden zijn dus 0 en -1 met corresponderende algebraïsche multipliciteiten 1 en 2. Om diagonaliseerbaarheid na te gaan dient de meetkundige multipliciteit horende bij eigenwaarde -1 te worden gecontroleerd. Gezien we toch P moeten opstellen, kunnen we evengoed alle eigenruimtes berekenen.

Beschouw eigenwaarde 0. Dan moeten we een homogeen lineair stelsel oplossen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ééndimensionale eigenruimte die hierbij hoort is $\{(0, 2r, -r)^t : r \in \mathbb{R}\}$, een basis van eigenvectoren is $\{(0, 2, -1)^t\}$.

Beschouw nu eigenwaarde -1. Dan moeten we een homogeen lineair stelsel oplossen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Op dit punt weten we reeds dat de bijhorende oplossingenverzameling tweedimensionaal is, dus de matrix is diagonaliseerbaar. De tweedimensionale eigenruimte die hierbij hoort is $\{(r, -3r - 3s, s)^t : r, s \in \mathbb{R}\}$, een basis van eigenvectoren is $\{(1, -3, 0)^t, (0, -3, 1)^t\}$.

Dus $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, bijvoorbeeld. Heel wat variaties zijn mogelijk.

Tot slot, waaraan is $f^{2023}(x)$ gelijk? Wel, x heeft t.o.v. de standaardbasis coördinaatvector $(0,1,0)^t$, dus haar beeld heeft coördinaatvector

$$\begin{aligned}
A_f^{2023}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &= (PDP^{-1})^{2023}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= PD^{2023}P^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0&1&0\\2&-3&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-1&-3\\1&0&0\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dus $f^{2023}(x) = x^2 - 3x$.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 6. (2 punten) Zij K een veld en V en W twee eindigdimensionale K-vectorruimten, samen met een lineaire afbeelding $f : V \to W$ en haar duale afbeelding[1] $f^* : W^* \to V^*$.

Net zoals in Oefening 7.3.2 definiëren we voor elke deelruimte $U \leqslant W$:

$$U^\circ := \{\psi \in W^* : U \leqslant \ker(\psi)\}.$$

(i) Bewijs dat $\ker(f^*) = (\mathrm{im}(f))^\circ$.

(ii) Bewijs dat $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{im}(f^*))$.
Tip: gebruik Oefening 7.3.2(c) en de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen.

Oplossing.

[1]De *duale afbeelding* f^* beeldt een element $\psi \in W^*$ af op de samenstelling $\psi \circ f \in V^*$.

(i) Voor een element $\psi \in W^*$ geldt dat

$$\begin{aligned}
\psi \in \ker(f^*) &\Leftrightarrow f^*(\psi) = 0_{V^*} \\
&\Leftrightarrow [f^*(\psi)](v) = 0_K, \quad \forall v \in V \\
&\Leftrightarrow [\psi \circ f](v) = 0_K, \quad \forall v \in V \\
&\Leftrightarrow \psi\left(f(v)\right) = 0_K, \quad \forall v \in V \\
&\Leftrightarrow \psi\left(w\right) = 0_K, \quad \forall w \in \mathrm{im}(f) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{im}(f) \leqslant \ker(\psi) \\
&\Leftrightarrow \psi \in \left(\mathrm{im}(f)\right)^\circ .
\end{aligned}$$

(ii) De tip geeft ons mee dat

$$\dim\big(\,(\mathrm{im}(f))^\circ\,\big) = \dim(W) - \dim(\mathrm{im}(f)),$$

en wegens de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen, toegepast of f^*, volgt dat

$$\dim(W^*) = \dim(\ker(f^*)) + \dim(\mathrm{im}(f^*)).$$

Gebruikmakend van $\dim(W) = \dim(W^*)$ bekomen we uit bovenstaande twee gelijkheden dat

$$\dim\big(\,(\mathrm{im}(f))^\circ\,\big) = \dim(\ker(f^*)) + \dim(\mathrm{im}(f^*)) - \dim(\mathrm{im}(f)),$$

het gestelde volgt dan uit (i).