Theorie Topologie en metrische ruimten

Beantwoord vragen 1 en 2 op een geruit blad, en beantwoord vragen 3–8 op het vragenblad.

1. Zij K een compacte topologische ruimte en zij $(f_n)_n$ een dalende rij van continue afbeeldingen $K \to \mathbb{R}$. Als $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert op K naar een continue afbeelding $g\colon K \to \mathbb{R}$, toon dan aan dat de convergentie gelijkmatig is.

   Je mag hierbij de volgende stelling zonder bewijs gebruiken:

   Stelling 1. *Zij X een topologische ruimte en f, g continue afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$. Dan zijn ook $f \pm g$ continu $X \to \mathbb{R}$.*

2. Beantwoord de vragen.

   Stelling 2. *$V \subseteq \mathbb{R}$ is samenhangend als en slechts als V een interval is.*

   Bewijs. $\Rightarrow$: als V geen interval is, dan bestaan $a < c < b \in \mathbb{R}$ zo dat $a, b \in V$ en $c \notin V$. Dan is $V = (V \cap]-\infty, c[) \cup (V \cap]c, +\infty[)$. [1]
   $\Leftarrow$: als V een interval is, dan is V° een open interval, en dus een open gebied, en dus (door een vorige stelling) samenhangend. Wegens ... [2] is dan ook V samenhangend. □

   [1] Voltooi het bewijs.
   [2] Welke eigenschap kan je toepassen om te zien dat dan ook V samenhangend is?

   Stelling 3. *Zij $(x_n)_n$ een rij in een eerste aftelbaarheidsruimte X. Dan convergeert een deelrij van $(x_n)_n$ naar $a \in X$ als en slechts als*

   $$(\forall U \text{ omgeving van } a)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \geq m)(x_n \in U).$$

   Stelling 4. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke dalende rij $(F_n)_n$ van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

   Bewijs. $\Rightarrow$: kies $x_n \in F_n$, voor elke $n \in \mathbb{N}$. Door het gegeven convergeert een deelrij $(x_{n_m})_m$ naar een element $x \in X$. Kies $M \in \mathbb{N}$. Vermits $x_{n_m} \in F_{n_M}$ zodra $m \geq M$, is $\underline{x \in \overline{F_{n_M}}}$[3] $= F_{n_M}$. Omdat M willekeurig is en $(F_n)_n$ dalend, is $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
   $\Leftarrow$: zij $(x_n)_n$ een rij in X. We gaan na dat $(x_n)_n$ een convergente deelrij heeft. We definiëren

   $$F_m := \overline{\{x_n : n \geq m\}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

   Dan is $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ een dalende rij van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X. Door het gegeven bestaat $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$. Kies een omgeving U van x en $m \in \mathbb{N}$. $\underline{\text{Dan bestaat } n \geq m \text{ waarvoor } x_n \in U.}$[4] Het gevraagde volgt nu uit stelling 3. □

   [3,4] Verklaar het onderlijnde.

   Stelling 5. *Zij K een compacte topologische ruimte en M een complete metrische ruimte. Als $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{C}(K, M), d_\infty)$ equicontinu is, gesloten onder gelijkmatige convergentie, en $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ is totaal begrensd voor elke $x \in K$, dan is $\mathcal{F}$ compact (voor de metriek d_∞).*

   Bewijs. Omdat M compleet is, is $\mathcal{C}(K, M) \overset{[5]}{=} \mathcal{C}_b(K, M)$ compleet. Omdat $\mathcal{F}$ gesloten is in $(\mathcal{C}(K, M), d_\infty)$ is dus ook $\mathcal{F}$ compleet.

   Kies $\varepsilon > 0$. $\underline{\text{Elke } x \in K \text{ heeft een omgeving } V_x \text{ zo dat } d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon, \text{ voor elke } f \in \mathcal{F} \text{ en } y \in V_x.}$[6] Omdat K compact is, is $K \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_N}$ voor zekere $x_1, \ldots, x_N \in K$.
   Nu is $\underline{\{(f(x_1), \ldots, f(x_N)) : f \in \mathcal{F}\} \text{ totaal begrensd in } M^N \text{ met de product-metriek.}}$[7] We vinden $\underline{\text{een eindig aantal } f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F} \text{ met de eigenschap dat voor elke } f \in \mathcal{F} \text{ een } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ bestaat waarvoor } d(f(x_k), f_j(x_k)) \leq \varepsilon,\ \forall k \in \{1, \ldots, N\}}$[8]. Dan is voor elke $x \in K$

   $$d(f(x), f_j(x)) \leq d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f_j(x_k)) + d(f_j(x_k), f_j(x)) \leq 3\varepsilon$$

   (voor zekere $k \in \{1, \ldots, N\}$). M.a.w., $d_\infty(f, f_j) \leq 3\varepsilon$. □

[5] Verklaar de gelijkheid.
[6,7,8] Verklaar het onderlijnde.

Stelling 6. *Zij* $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *en* $(f_n)_n$ *een stijgende rij in* $\mathcal{L}^1$ *die puntsgewijs nadert naar* f*. Als* $\left(\int f_n\right)_n$ *naar boven begrensd is (d.w.z.: door een reëel getal), dan is* $f_n \overset{L^1}{\to} f$*.*

Bewijs. Stel $g_1 := 0$, $g_2 := f_2 - f_1$, $\ldots$, $g_{n+1} := f_{n+1} - f_n$, $\ldots$ Dan zijn $g_n \in \mathcal{L}^1$, $g_n \geq 0$ en voor elke n is $f - f_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k$, zodat

$$\|f - f_n\|_1 = \overline{\int}(f - f_n) \overset{[9]}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\int} g_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int f_k - \int f_{k-1}\right) = \lim_{m\to\infty} \int f_m - \int f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

omdat de stijgende rij van reële getallen $\left(\int f_n\right)_n$ convergeert in $\mathbb{R}$.[10] □

[9] Verklaar de ongelijkheid.
[10] Geldt het bewijs nog als we de voorwaarde weglaten dat $\left(\int f_n\right)_n$ naar boven begrensd is? Waarom (niet)?

NAAM: ....

Beantwoord vragen 1 en 2 op een geruit blad, en beantwoord vragen 3–8 op het vragenblad.

3. Beantwoord met 1 woord: JA of NEE.

(JA/NEE) Elke compacte deelverzameling van een samenhangende metrische ruimte is samenhangend.

(JA/NEE) Als $f\colon X \to Y$ een homeomorfisme is en $V \subseteq X$ is dicht in X, dan is ook $f(V)$ dicht in Y.

(JA/NEE) Als V een verzameling is en X een topologische ruimte, dan is de puntsgewijze topologie τ_{pt} op X^V de enige topologie op X^V waarvoor de afbeeldingen $X^V \to X\colon f \mapsto f(x)$ continu zijn voor elke $x \in V$.

4. Zij X een topologische ruimte en $x \in X$. Is de samenhangcomponent van x in de ruimte X gelijk aan de unie van alle samenhangende deelverzamelingen van X die x bevatten? Leg uit. (Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

....

....

....

....

....

....

....

5. Zij K, M metrische ruimten met K compact. Zij f een continue afbeelding $K \to M$. Als C een complete deelverzameling is van K, is dan ook $f(C)$ compleet? Leg uit. (Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Zij (Y, τ_Y) een topologische ruimte met subbasis $\mathcal{S}$ en f een afbeelding $(X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Als het invers beeld onder f van elke $V \in \mathcal{S}$ open is, is f dan continu? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

7. Zij X een topologische ruimte en f een surjectieve afbeelding $X \to Y$. Hoeveel topologieën bestaan er op Y waarvoor f tegelijk continu en open is? (Een afbeelding is open als ze open verzamelingen afbeeldt op open verzamelingen.) Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

8. Als $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ en $f_n \xrightarrow{L^1} f$, is f dan Lebesgue-meetbaar? Leg uit.
(Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.)

Schrijf je naam op alle antwoordbladen.
Vraag uitleg over vragen die onduidelijk of vreemd zijn.
Succes!