Examen ELEKTROMAGNETISME - THEORIE - 02/02/2004 - 8:30

T1. Beschouw een bewegende ladingsverdeling, bevat in een volume $\mathcal{V}$ en met ladingsdichtheid ρ, in een elektromagnetisch veld. Onderstel dat we te maken hebben met een lineair isotroop midden met constitutieve wetten $\mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E}$ en $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$. Indien $\mathbf{P}_{mech}$ de mechanische impuls voorstelt van $\mathcal{V}$, dan wordt de Newtoniaanse bewegingsvergelijking $\dfrac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})\, d^3\mathbf{r}$.

(i) Toon aan dat het integrandum (de Lorentzkrachtdichtheid) nog te schrijven is als

$$\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}).$$

(ii) Bewijs dat $\mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}) - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$.

(iii) Maak gebruik van (ii) en van een analoge relatie voor $\mathbf{D}$ en $\mathbf{E}$ (*die je niet meer hoeft aan te tonen!*)om uit de bewegingsvergelijking de volgende behoudswet af te leiden:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{mech} + \mathbf{P}_{veld}) = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathsf{T} \cdot \mathbf{n}\, dS\,, \quad (\text{met } \mathbf{P}_{veld} := \int_{\mathcal{V}} \epsilon\mu\mathbf{S}\, d^3\mathbf{r})$$

waarbij $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (de energiestroomdichtheid) en $\mathsf{T} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathsf{I}$ (de spanningstensor), met I de eenheidstensor.

T2. Bestudeer de voortplanting van elektromagnetische golven in kristallen. Daarbij is $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, en hebben we als constitutieve wetten $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ en $\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$, met μ een scalair en $\boldsymbol{\epsilon}$ een symmetrische tensor.

(i) Stel de golfvergelijkingen op voor $\mathbf{E}$ en voor $\mathbf{B}$.

(ii) Stel voor $\mathbf{E}$ een vlakke golfoplossing $\mathbf{E} = \mathbf{a}\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\, t)$ voorop, met $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ en $\omega = vk$. Hierin is $\mathbf{n}$ een eenheidsvector, in de voortplantingsrichting van de golf, en v de te bepalen fasesnelheid. Toon aan, na substitutie van deze vlakke golf in de vergelijking voor $\mathbf{E}$ en na projectie van de bekomen vectorvergelijking op een assenstelsel waarin de symmetrische tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ diagonaal is (met diagonaalelementen ϵ_i, $i = 1,2,3$) dat bij elke vooropgegeven $\mathbf{n}$, de corresponderende v moet voldoen aan de bikwadratische vergelijking

$$\sum_i \frac{n_i^2}{c_i^2 - v^2} = 0\,, \quad \text{met } c_i^2 = \frac{1}{\mu\epsilon_i}\,.$$

(iii) Uit (ii) volgt dat bij een gegeven $\mathbf{n}$ meestal twee verschillende fasesnelheden v' en v'' horen. Toon aan dat de daarmee corresponderende diëlektrische verplaatsingen, resp. $\mathbf{D}'$ en $\mathbf{D}''$, loodrecht op elkaar staan.

---

(1) Niet vergeten: OP ELK BLAD UW NAAM EN STUDIERICHTING VERMELDEN!!

(2) Vragenblad en eventuele kladbladen moeten NIET afgegeven worden.

Examen ELEKTROMAGNETISME - OEFENINGEN - 02/02/2004 - 8:30

O1. Een kwadrupool bestaat uit twee positieve $(+Q)$ en 2 negatieve ladingen $(-Q)$, gelegen op de hoeken van een vierkant met zijde D, zodanig dat elke twee naburige ladingen tegengesteld teken hebben.
Leg de oorsprong O van een cartesisch coördinatenstelsel $(O; X, Y, Z)$ in een positieve lading, met de X- en Y-as gelegen langs zijden van het vierkant, zoals getoond op de figuur.

1. Beschouw dan een waarnemer W, wiens positie t.o.v. O gekenmerkt wordt door de sferische coördinaten (r, θ, φ). Toon dan aan dat de elektrostatische potentiaal $V(r, \theta, \varphi)$ in W gegeven wordt door

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{3QD^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi + \text{ hogere orde in } \frac{1}{r},$$

als W zich op grote afstand r van de ladingen bevindt. Je mag gebruik maken van

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \qquad \text{voor } x \text{ klein}$$

2. Bepaal nu ook de multipoolontwikkeling (mono-, di- en kwadrupoolmoment) van de gegeven ladingsconfiguratie. Wat merk je op?

O2. Een vlakke elektromagnetische golf valt loodrecht in op het grensvlak van 2 diëlektrica. Voor medium 1, respectievelijk medium 2, onderstellen we een diëlektriciteitsconstante ϵ_1, respectievelijk $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$, magnetische permeabiliteit μ_1, respectievelijk μ_2 en brekingsindex[1] n_1, respectievelijk n_2. Onderstel dat op het grensvlak geen oppervlaktestroom voorkomt en dat $\mu_1 = \mu_2$. Indien het YZ-vlak het grensvlak voorstelt, dan worden volgende uitdrukkingen voor de elektrische velden vooropgesteld,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(x,y,z,t) = E_I e^{i(k_I x - \omega_I t)} \mathbf{e}_z & \text{(voor de invallende golf)} \\ \mathbf{E}_T(x,y,z,t) = E_T e^{i(-k_T x - \omega_T t)} \mathbf{e}_z & \text{(voor de teruggekaatste golf)} \\ \mathbf{E}_D(x,y,z,t) = E_D e^{i(k_D x - \omega_D t)} \mathbf{e}_z & \text{(voor de doorgelaten (i.e. gebroken) golf)} \end{cases}$$

waarbij E_I, E_T, E_D *constante* amplitudes voorstellen.

1. Verifieer de randvoorwaarden en toon aan dat de frequentie van de golf onveranderd blijft, zowel na breking als na terugkaatsing (dus dat $\omega_I = \omega_D = \omega_T$), terwijl $k_I = k_T \neq k_D$.

2. Toon aan dat de verhoudingen $\frac{E_T}{E_I}$ en $\frac{E_D}{E_I}$ gegeven worden door

$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad \frac{E_D}{E_I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

[1] $n = \frac{c}{v}$ met c de snelheid in vacuüm en v de snelheid in het beschouwde medium

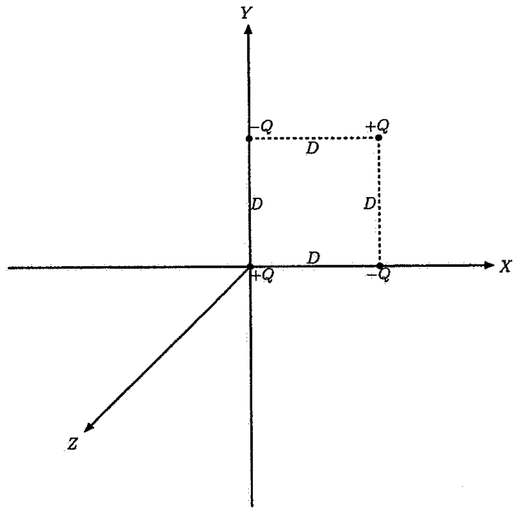

Figure 1: Oefening 1.

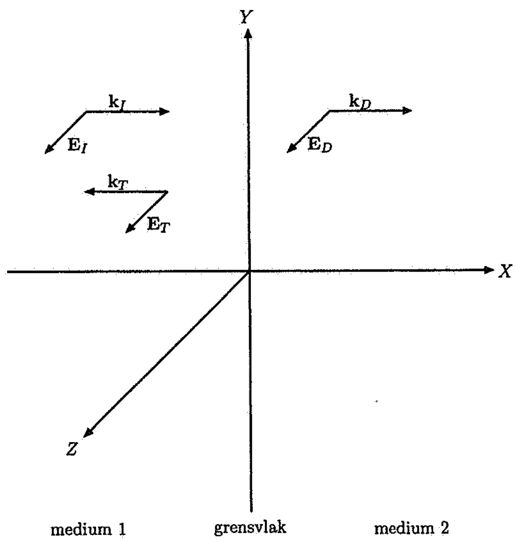

Figure 2: Oefening 2.