Examen ELEKTROMAGNETISME - THEORIE - 01/09/2004 - 8:30

T1. Twee verschillende media (1 en 2) worden gescheiden door een glad oppervlak Σ. Deze middens worden gekarakteriseerd door materiaalconstanten ϵ_i, μ_i en bevatten ladings- en stroomverdelingen met dichtheden ρ_i en $\mathbf{J}_i$ (i=1,2). De diëlektrische verplaatsing en de magnetische veldsterkte in beide middens noteren we als $\mathbf{D}_i, \mathbf{H}_i$ (i=1,2). Het grensoppervlak Σ bevat een oppervlakteladingsdichtheid η en een oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K}$. Noem $\mathbf{n}$ de eenheidsvector langs de oppervlaktenormaal aan Σ, georiënteerd van medium 1 naar medium 2.

Leidt de randvoorwaarden af voor: (i) de normale component van de diëlektrische verplaatsing, (ii) de normale component van de stroomdichteid en (iii) voor de tangentiële component van de magnetische veldsterkte.

Beschouw daartoe een willekeurig gebied V in de ruimte, met glad randoppervlak, dat een deel van beide media omvat en een stuk S van het grensoppervlak Σ uitsnijdt. Dit deeloppervlak S wordt begrensd door een gladde gesloten kromme C waaraan een oriëntatie wordt toegekend die in overeenstemming is met de gekozen oriëntatie voor de oppervlaktenormaal $\mathbf{n}$. Langs C voeren we nog twee eenheidsvectoren in, $\mathbf{t}$ en $\mathbf{t}_n$, met $\mathbf{t}$ langs de raaklijn aan C (overeenkomstig de gekozen oriëntatie), $\mathbf{t}_n$ rakend aan het oppervlak Σ en loodrecht op $\mathbf{t}$, zó dat het geordend drietal $(\mathbf{t}_n, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ in elk punt van C een positieve orthonormale basis vormt.

(i) Toon aan dat er in punten van Σ voldaan is aan

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \eta \,.$$

(ii) Bewijs, steunend op de behoudswet van lading ($\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$), dat de stroomdichtheden voldoen aan de betrekking

$$\int_S (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{n}\, dS + \oint_C \mathbf{K} \cdot \mathbf{t}_n ds + \int_S \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dS = 0 \,.$$

(iii) Maak gebruik van (i) en (ii) om aan te tonen dat, in punten van Σ, voor de magnetische veldsterkte geldt

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \,.$$

T2. Een puntlading q beschrijft een baan $\mathbf{r}_0(t)$ in een diëlektricum, met snelheid $\mathbf{u}(t)$.

(i) Wat zijn de uitdrukkingen voor de ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r}, t)$ en de stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ die corresponderen met deze bewegende puntlading?

(ii) Indien we weten dat de scalaire en vectorpotentiaal van een ladings- en stroomverdeling algemeen gegeven worden door

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3\mathbf{r}'\, dt'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \,, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}'\, dt'\, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \,, \end{aligned}$$

met $\mathbf{r}$ de plaats van de waarnemer en t het tijdstip van de waarneming, toon dan aan dat deze uitdrukkingen zich in het geval van de bewegende puntlading herleiden tot de