Academiejaar 2004-2005, 22 december 2004, 14.00u

Examen: Toepassingsgerichte Formele Logica 1

1. Onderstaand programma in lambdacalculus verwacht 2 invoergegevens die overeenkomen met de waarheidswaarden van 2 proposities, b.v. p en q. Het programma geeft dan als uitvoer de waarheidswaarde van $p \vee q$ in de gebruikelijke tweewaardige semantiek.

$$\lambda xy.x(\lambda xy.x)y$$

   (a) Wat is de uitvoer van het programma wanneer het 1e invoergegeven $\lambda xy.y$ is?

   (b) Welke waarheidswaarde wordt voorgesteld door $\lambda xy.y$?

2. Beschouw de propositie $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (x \equiv y)$

   (a) Geef een calculationeel bewijs voor bovenstaande propositie. Je mag gebruik maken van de axioma's en van stellingen 1 t.e.m. 56 zonder deze afzonderlijk te bewijzen. Indien je gebruik wenst te maken van andere stellingen, dien je die wel uitdrukkelijk te bewijzen.

   (b) Ga na wat de waarheidswaarde is van bovenstaande propositie in alle mogelijke toestanden in de gebruikelijke tweewaardige semantiek.

   (c) Leg de begrippen "tautologie" en "stelling" uit en illustreer a.d.h.v. bovenstaand voorbeeld.

   (d) Geef de bewijsmethode die steunt op bovenstaande propositie.

3. (a) Wat is de bewijsmethode van veralgemening (voor het geven van bewijzen m.b.t. de kwantor $\forall$)?

   (b) Toon aan dat $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = x)$

   (c) Hierna wordt "bewezen" dat alle natuurlijke getallen gelijk zijn. Leg uit wat er mis is met dit "bewijs".

   Als bewijs voor $\forall(x:\mathbb{N}\,.\,\forall(y:\mathbb{N}\,.\,x = y))$ volstaat, wegens veralgemening, een bewijs voor $x \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall(y:\mathbb{N}\,.\,x = y)$. Voor dit laatste volstaat, wegens veralgemening, een bewijs voor $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = x)$.

4. Zij R een relatie in X, d.w.z. R is van het type $X^2 \to \mathbb{B}$.

   (a) Wanneer wordt R reflexief genoemd?

   (b) Geef de definitie van R–minimaal element.

   (c) Bewijs dat geen enkele deelverzameling van X een R–minimaal element bezit indien R reflexief is.

Academiejaar 2004-2005, 19 januari 2005, 14.00u

Examen: Toepassingsgerichte Formele Logica 1

1. (a) Geef de formele definitie van fixpuntcombinator.

   (b) Wat is het belang van fixpuntcombinatoren voor de lambdacalculus als programmeertaal?

   (c) Toon aan dat de volgende lambdacombinator een fixpuntcombinator is:

   $$(\lambda xy\,.\,y(xxy))(\lambda xy\,.\,y(xxy))$$

2. (a) Geef een calculationeel bewijs voor $(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \equiv (x \vee y) \Rightarrow z$. Je mag gebruik maken van de axioma's en van stellingen 1 t.e.m. 54 zonder deze afzonderlijk te bewijzen. Indien je gebruik wenst te maken van andere stellingen, dien je die wel uitdrukkelijk te bewijzen.

   (b) Geef een calculationeel bewijs voor $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y) \equiv y$.

   (c) Ga na wat de waarheidswaarde is van $(z \equiv x) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ in alle mogelijke toestanden in de gebruikelijke tweewaardige semantiek.

   (d) Toon a.d.h.v. een calculationeel bewijs aan dat het digitaal circuit uit figuur 1 de volgende specificatie implementeert:

   $$(\neg a \wedge b \wedge c \Rightarrow z) \wedge (a \wedge \neg b \wedge c \Rightarrow z) \wedge (a \wedge b \wedge \neg c \Rightarrow z) \wedge (a \wedge b \wedge c \Rightarrow z)$$

3. Zij P en Q predikaten met $\mathcal{D}\,P = \mathcal{D}\,Q$.

   (a) Geef de formele definitie van de existentiële kwantor $\exists$.

   (b) Geef een voorbeeld waarin $\exists P \wedge \exists Q$ maar niet $\exists(P \mathbin{\hat{\wedge}} Q)$.

   (c) Hieronder wordt zogezegd een "bewijs" gegeven voor $\exists P \wedge \exists Q \Rightarrow \exists(P \mathbin{\hat{\wedge}} Q)$. Leg uit wat er fout loopt.

   $$\begin{array}{llll}
   (1) & \exists P \wedge \exists Q & \equiv \langle \exists P \equiv \neg\forall(\hat{\neg} P)\rangle & \neg\forall(\hat{\neg} P) \wedge \neg\forall(\hat{\neg} Q) \\
   (2) & & \equiv \langle \neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y\rangle & \neg(\forall(\hat{\neg} P) \vee \forall(\hat{\neg} Q)) \\
   (3) & & \Rightarrow \langle \forall P \vee \forall Q \Rightarrow \forall(P \mathbin{\hat{\vee}} Q)\rangle & \neg\forall(\hat{\neg} P \mathbin{\hat{\vee}} \hat{\neg} Q) \\
   (4) & & \equiv \langle \hat{\neg}(P \mathbin{\hat{\wedge}} Q) = \hat{\neg} P \mathbin{\hat{\vee}} \hat{\neg} Q\rangle & \neg\forall(\hat{\neg}(P \mathbin{\hat{\wedge}} Q)) \\
   (5) & & \equiv \langle \exists P \equiv \neg\forall(\hat{\neg} P)\rangle & \exists(P \mathbin{\hat{\wedge}} Q)
   \end{array}$$

4. Zij R een relatie in X, d.w.z. R is van het type $X^2 \to \mathbb{B}$.

   (a) Wanneer wordt R antisymmetrisch genoemd?

   (b) Geef de definitie van R-kleinste element.

   (c) Bewijs dat indien R antisymmetrisch is, elke deelverzameling van X hoogstens 1 R-kleinste element heeft.