Academiejaar 2004-2005, 7 september 2005, 8.30u

Examen: Toepassingsgerichte Formele Logica 1

1. (a) Na het uitvoeren van een toekenningsopdracht wens je terecht te komen in een toestand waarin een gegeven postconditie geldt. Hoe bepaal je de bijhorende preconditie?

   (b) Illustreer dit voor toekenningsopdracht $y := x + y$ en postconditie $y = x$.

2. Beschouw het volgende programma in lambdacalculus

$$\lambda x.xx$$

   (a) Wat is de uitvoer van dit programma bij invoer $\lambda y.yzx$?

   (b) Geef een voorbeeld van een invoergegeven waarvoor het programma niet uitvoerbaar is. Licht dit kort toe.

3. Beschouw de propositie

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \;\equiv\; (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

   (a) Geef een calculationeel bewijs voor bovenstaande propositie. Je mag gebruik maken van de axioma's en van stellingen 1 t.e.m. 40 zonder deze afzonderlijk te bewijzen. Indien je gebruik wenst te maken van andere stellingen, dien je die wel uitdrukkelijk te bewijzen.

   (b) Ga na wat de waarheidswaarde is van bovenstaande propositie in alle mogelijke toestanden in de gebruikelijke tweewaardige semantiek.

   (c) Leg de begrippen "tautologie" en "stelling" uit en illustreer a.d.h.v. bovenstaand voorbeeld.

4. Gegeven zijn de volgende 4 "rekenregels" voor interacties tussen enerzijds de kwantoren en anderzijds $\wedge$ en $\vee$:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \forall(P \mathbin{\widehat{\wedge}} Q) \Rightarrow \forall P \wedge \forall Q \\
(2) & \forall(P \mathbin{\widehat{\vee}} Q) \Rightarrow \forall P \vee \forall Q \\
(3) & \exists(P \mathbin{\widehat{\wedge}} Q) \Rightarrow \exists P \wedge \exists Q \\
(4) & \exists(P \mathbin{\widehat{\vee}} Q) \Rightarrow \exists P \vee \exists Q
\end{array}$$

   Hierbij zijn P en Q predikaten met $\mathcal{D}\,P = \mathcal{D}\,Q$.

   (a) Zeg welke van deze 4 rekenregels fout is. Geef ook een voorbeeld waaruit blijkt dat deze rekenregel fout is.

   (b) Geef de juiste rekenregel voor de betreffende interactie.

   (c) Geef een calculationeel bewijs voor de verbeterde versie van de rekenregel.

5. Zij R een relatie in X, d.w.z. R is van het type $X^2 \to \mathbb{B}$.

   (a) Wanneer wordt R reflexief genoemd? Wanneer symmetrisch? Wanneer transitief?

   (b) Hieronder wordt "aangetoond" dat elke symmetrische en transitieve relatie ook reflexief is. Leg uit wat er fout gaat in dit "bewijs".

   > Zij R een symmetrische en transitieve relatie. Als xRy dan geldt wegens de symmetrie ook yRx. Met de transitiviteit volgt dan xRx. Dus R is reflexief.