Examen *Statistiek*
2de kandidatuur Natuurkunde

Eerste zittijd 2004-2005

Theorie

1. (a) Geef de definitie van de Maximum Likelihood methode. (Leg ook uit wat Likelihood is!) Bespreek kort **waarom** dit een mogelijke schatter is.
   (b) Gebruik deze methode om een schatter te vinden voor de parameter λ van een Poisson verdeling.
   (c) Geef de definitie van de momentenmethode. Bespreek kort **waarom** je dit een logische keuze voor een schatter vindt.
   (d) Gebruik de methode van de momenten om een schatter te vinden voor de Poisson parameter.

   (4pt)

2. We hebben m functies $f_1, f_2, \cdots, f_m$ van n variabelen $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$. De $x_{(i)}$ hebben fouten en kunnen eventueel gecorreleerd zijn. Leid de algemene formule af voor de fouten en correlaties op de functies f_j.
   (3pt)

3. De Erlang-verdeling komt voor in wachtlijntheorie.

$$f_k(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

   Wat is het domein van deze verdeling? Leid voor deze verdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking af. Geef ook de modus.
   (3pt)

Examen *Statistiek*

2de kandidatuur Natuurkunde

Oefeningen

1. (a) De gemiddelde temperatuur in Midden-Engeland voor januari is opgenomen in de onderstaande tabel. Met welke confidentie-limiet kan je stellen dat de temperatuur in het decennium 1991-2000 gemiddeld genomen gestegen is ten opzichte van die tussen 1961 en 1990?

1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	'61-'90
3.3	3.7	5.9	5.3	4.8	4.3	2.5	5.2	5.5	4.9	3.8

   (b) In onderstaande tabel wordt de gemiddelde temperatuur voor elke maand in het jaar 2000 en voor de periode 1961-1990 gegeven. Met welke confidentie-limiet kan je stellen dat de temperatuur in 2000 gestegen was t.o.v. die tussen 1961-1990?

	Jan	Feb	Maa	Apr	Mei	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
2000	4.9	6.3	7.6	7.8	12.1	15.1	15.5	16.6	14.7	10.3	7.0	5.8
'61-'90	3.8	3.8	5.7	7.9	11.2	14.1	16.1	15.8	13.6	10.6	6.5	4.6

   (4pt)

2. In situaties waarbij een groot aantal onafhankelijke geluidsbronnen actief zijn wordt de resulterende geluidsintensiteit beschreven door de Rayleigh-distributie (genoemd naar de ontdekker J.J.Thomson, Lord Rayleigh):

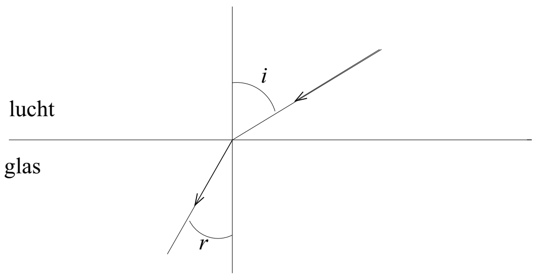
$$f(r) = \frac{r}{D}\exp(-\frac{r^2}{2D})$$

   Gebruik de inverse transformatie methode om een formule op te stellen voor het genereren van toevalsgetallen volgens deze verdeling. (3pt)

3. Je meet de brekingsindex van glas door gebruik te maken van de wet van Snellius:

$$\sin i = n \cdot \sin r$$

   waarbij i en r gedefiniëerd zijn in onderstaande figuur. In de tabel vind je de gemeten waarden en de fout er op.



i	r
$(20\pm1)^\circ$	$(13\pm1)^\circ$
$(40\pm1)^\circ$	$(23.5\pm1)^\circ$

   (a) geef de brekingsindex $n \pm \sigma_n$
   (b) zijn de meetresultaten compatibel?
   (c) Zo ja, geef de beste schatting voor de brekingsindex (en de fout);
   zo neen, met welke significantie wijken de twee metingen van elkaar af?

   (3pt)

Examen *Statistiek*

2de kandidatuur Natuurkunde

Formularium

- Exponentiële verdeling
$$P(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$
- χ^2-verdeling
$$P(\chi^2;n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \chi^{2(n/2-1)} e^{-\chi^2/2}$$
- Poisson verdeling
$$P(r;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$
- Gamma-functie
$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty u^x e^{-u} du \\
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+1) &= x! \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \\
\Gamma(p) &= a^p \int_0^\infty z^{p-1} e^{-az} dz
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \qquad \int_{0}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

Hogere machten kunnen bekomen worden door af te leiden naar a:

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad \int_{0}^{+\infty} z^{2n+1} e^{-z^2/2} dz = 2^n n!$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2n} e^{-z^2/2} dz = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{2\pi}$$

Voor een oneven macht wordt de symmetrische integraal identiek 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2n+1} e^{-z^2/2} dz = 0$$

Tabel 1: Handige integralen