Examen Wiskundige Methoden in de Fysica - 31/01/2005 - 8:30

O1. Een bol met straal a heeft op $t = 0$ een sferisch symmetrische temperatuursverdeling $T(r,0) = f(r)$. De bol koelt af terwijl het boloppervlak op $T = 0$ wordt gehouden. Toon dan aan dat $T(r,t)$, die voldoet aan

$$\Delta T = \frac{\partial}{\partial \tau} T \qquad \text{met } \tau = \frac{kt}{\rho c} \ ,$$

gegeven wordt door

$$T(r,t) = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \tau}{a^2}} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \int_0^a f(R) \sin\left(\frac{n\pi R}{a}\right) R dR$$

<u>hint</u>
stel $T = \frac{u}{r}$ en los op in termen van u.

O2. Beschouw functies $h_n(x)$ ($n \in \mathbb{Z}$) die voldoen aan de volgende recursiebetrekking

$$h_{n-1}(x) + h_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} h_n(x)$$

Onderstel dat $h_0(x) = J_0(x)$ met $J_0(x)$ de 0^{de} Besselfunctie.

Bewijs dan dat $h_n(x) = J_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>hint</u>
stel $H(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(x) t^n$ en bewijs dat $H(x,t) = g(x,t)$, met $g(x,t)$ de genererende functie van de Besselfuncties. Doe dit door, gebruik makende van de recursiebetrekking, een differentiaalvergelijking voor $H(x,t)$ op te stellen en op te lossen.

Bonusvraag: Bepaal $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\pi)$.

O3. Bereken via een geschikte contourintegratie, $\forall\ a > 0$

$$\int_0^a \frac{dx}{(x-2a)\sqrt{x(a-x)}}$$

---

(1) Niet vergeten: OP ELK BLAD UW NAAM EN STUDIERICHTING VERMELDEN!!