Academiejaar 2005-2006, 18 januari 2006, 8.30u

Examen: Toepassingsgerichte Formele Logica 1

1. Voor het voorstellen van en het rekenen met lijsten in de lambdacalculus maken we gebruik van de volgende lambdacombinatoren:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\textsf{Tru} & = & \lambda xy.x & \textsf{Head} & = & \lambda x.x\textsf{Tru} & \textsf{Isempty} & = & \lambda x.x(\lambda yz.\textsf{Fls}) \\
\textsf{Fls} & = & \lambda xy.y & \textsf{Tail} & = & \lambda x.x\textsf{Fls} & \textsf{Empty} & = & \lambda x.\textsf{Tru} \\
\textsf{Cons} & = & \lambda xyz.zxy & & & & & &
\end{array}$$

op de volgende manier (N en P zijn willekeurige lambdatermen)

lege lijst	**Empty**
lijst met één element	(**Cons** P **Empty**)
lijst met twee elementen	(**Cons** N(**Cons** P **Empty**))

(a) Ga het effect na van **Tail** op de lege lijst, een lijst met één element en een lijst met twee elementen.

(b) Ontwerp een nieuwe lambdacombinator **Staart** zodat het effect op de lege lijst **Empty** is maar het effect op alle andere lijsten hetzelfde als dat van **Tail**. Toon ook aan dat **Staart** inderdaad het gewenste gedrag vertoont. Je mag er daarbij van uitgaan dat het effect van **Isempty** op de lege lijst **Tru** is, en **Fls** op alle andere lijsten.

2. Onderstaande vraag betreft het propositierekenen met de gebruikelijke tweewaardige semantiek, gebaseerd op de 4 afleidingsregels en 15 axioma's uit bijgaande tabel.

(a) Leg de begrippen "tautologie" en "stelling" uit.

(b) Geef een voorbeeld van een propositie die tegelijk een tautologie en een stelling is (toon dit ook aan).

(c) Geef een voorbeeld van een propositie die wel een stelling is maar geen tautologie (toon dit ook aan).

(d) Geef een calculationeel bewijs voor stelling 59(b)

$$(x \equiv y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

Je mag gebruik maken van de axioma's en van stellingen 1 t.e.m. 59(a) zonder deze afzonderlijk te bewijzen. Indien je gebruik wenst te maken van andere stellingen, dien je die wel uitdrukkelijk te bewijzen.

(e) Verklaar waarom onderstaande ketting volstaat als een bewijs voor $q_1 \Rightarrow r_2$.

$$\begin{array}{lll}
q_1 & \equiv & \langle p_1 \rangle \quad r_1 \\
 & \Rightarrow & \langle p_2 \rangle \quad r_2
\end{array}$$

Hierbij zijn p_1, p_2, q_1, r_1 en r_2 proposities; p_1 en p_2 zijn stellingen.

3. (a) Onderstel dat x niet vrij voorkomt in p. Toon aan dat voldaan is aan

$$\exists(x:X\,.\,q) \wedge p \equiv \exists(x:X\,.\,q \wedge p)$$

Geldt deze eigenschap nog steeds wanneer x wel vrij voorkomt in p? Verklaar.

(b) Zij R, S en T relaties in X. Toon aan dat voldaan is aan

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

waarbij de samenstelling van relaties gedefinieerd is zoals gewoonlijk, d.w.z.

$$x(R \circ S)y \equiv \exists(z : X \,.\, xRz \wedge zSy)$$

voor alle x en y in X.

(c) Zij lp_1, lp_2 en lp_3 zinnen voortgebracht door *locpath* (zie bijgaand blad over XPath). Toon aan dat voldaan is aan

$$\mathcal{V}((lp_1/lp2)/lp_3) = \mathcal{V}(lp_1/(lp_2/lp_3))$$

waarbij $\mathcal{V}$ gedefinieerd wordt op het bijgaande blad over XPath.

4. (a) Zij R een relatie in X. Bewijs dat R inductie toelaat a.s.a. R goed geordend is. Je mag, zonder dit uitdrukkelijk te bewijzen, steunen op het feit dat

$$A = \emptyset \equiv \forall(x : X \,.\, \neg(x \in A))$$

voor elke deelverzameling A van X.

(b) Wat loopt er mis in onderstaand "bewijs" van de bewering dat elk positief reëel getal n kan geschreven worden als een gehele macht van 2?

Bewijs: Door inductie op n. Basisgeval: $n = 1 = 2^0$. Veronderstel dat elk positief reëel getal m met $m < n$ kan geschreven worden als een gehele macht van 2. Wegens de inductiehypothese is dan $n = 2 \cdot \frac{n}{2} = 2 \cdot 2^k$ voor een geheel getal k. Dus is $n = 2^{k+1}$.

Afleidingsregels van de propositiecalculus

Transitiviteit	$\frac{p \equiv q,\, q \equiv r}{p \equiv r}$ voor alle proposities p, q en r
Principe van Leibniz	$\frac{p \equiv q}{r[v:=p] \equiv r[v:=q]}$ voor alle proposities p, q en r en elke veranderlijke v
Instantiatie van een stelling	$\frac{p}{p[v:=q]}$ voor elke stelling p, (lijst van) veranderlijke(n) v en (lijst van) propositie(s) q
Gelijkgestemdheid	$\frac{p,\, p \equiv q}{q}$ voor alle proposities p en q

Axioma's van de propositiecalculus

Axioma 1	Associativiteit van $\equiv$	$((x \equiv y) \equiv z) \equiv (x \equiv (y \equiv z))$
Axioma 2	Symmetrie van $\equiv$	$x \equiv y \equiv y \equiv x$
Axioma 3	Definitie van 1	$1 \equiv y \equiv y$
Axioma 4	Definitie van 0	$0 \equiv \neg 1$
Axioma 5	Distributiviteit van $\neg$ t.o.v. $\equiv$	$\neg(x \equiv y) \equiv \neg x \equiv y$
Axioma 6	Definitie van $\not\equiv$	$(x \not\equiv y) \equiv \neg(x \equiv y)$
Axioma 7	Symmetrie van $\vee$	$x \vee y \equiv y \vee x$
Axioma 8	Associativiteit van $\vee$	$(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$
Axioma 9	Idempotentie van $\vee$	$x \vee x \equiv x$
Axioma 10	Distributiviteit van $\vee$ t.o.v. $\equiv$	$x \vee (y \equiv z) \equiv x \vee y \equiv x \vee z$
Axioma 11	Uitgesloten derde	$x \vee \neg x \equiv 1$
Axioma 12	Gouden regel	$x \wedge y \equiv x \equiv y \equiv x \vee y$
Axioma 13	Definitie van implicatie	$x \Rightarrow y \equiv x \vee y \equiv y$
Axioma 14	Gevolg	$x \Leftarrow y \equiv y \Rightarrow x$
Axioma 15		$(p \equiv q) \Rightarrow (r[v := p] \equiv r[v := q])$

XPath

Syntax

De syntax van de XPath–kern wordt in BNF–notatie gegeven door

$$
\begin{aligned}
locpath ::= {} & axis \underline{::} ntst \mid axis \underline{::} ntst \underline{[} fexpr \underline{]} \mid \underline{/} locpath \mid \underline{(} locpath \underline{/} locpath \underline{)} \mid \\
& \underline{(} locpath \underline{\mid} locpath \underline{)} \\
fexpr ::= {} & locpath \mid \underline{not}\ fexpr \mid \underline{(} fexpr\ \underline{and}\ fexpr \underline{)} \mid \underline{(} fexpr\ \underline{or}\ fexpr \underline{)} \\
axis ::= {} & \underline{self} \mid step \mid step \underline{^{+}} \\
step ::= {} & \underline{child} \mid \underline{parent} \mid \underline{left} \mid \underline{right}
\end{aligned}
$$

Hierbij is *locpath* het startsymbool van de taal. *ntst* is '$*$', een tag–naam of een deelverzameling van tag–namen.

Semantiek

De semantiek van een XPath uitdrukking wordt gedefinieerd als volgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(axis_1 :: P_i) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \wedge tag(n') \in P_i \\
\mathcal{V}(axis_1 :: P_i[fexpr_1]) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \wedge tag(n') \in P_i \wedge \phi(n', fexpr_1) \\
\mathcal{V}(axis_1 :: tag_1) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \wedge tag(n') = tag_1 \\
\mathcal{V}(axis_1 :: tag_1[fexpr_1]) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \wedge tag(n') = tag_1 \wedge \phi(n', fexpr_1) \\
\mathcal{V}(axis_1 :: *) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \\
\mathcal{V}(axis_1 :: *[fexpr_1]) &= (n, n') : N^2.\mathcal{V}(axis_1)(n, n') \wedge \phi(n', fexpr_1) \\
\mathcal{V}(/locpath_1) &= (n, n') : N^2.n = root \wedge (root, n') \in \mathcal{V}(locpath_1) \\
\mathcal{V}(locpath_1/locpath_2) &= \mathcal{V}(locpath_2) \square \mathcal{V}(locpath_1) \\
\mathcal{V}(locpath_1 | locpath_2) &= \mathcal{V}(locpath_1) \sqcup \mathcal{V}(locpath_2) \\
\mathcal{V}(self) &= (x, y) : N^2.x = y \\
\mathcal{V}(child) &= R_{\Downarrow} \sqcap co(R_{\Downarrow} \square R_{\Downarrow}) \\
\mathcal{V}(child^{+}) &= R_{\Downarrow} \\
\mathcal{V}(parent) &= \mathcal{V}(child)^{-1} \\
\mathcal{V}(parent^{+}) &= \mathcal{V}(child^{+})^{-1} \\
\mathcal{V}(right) &= R_{\Rightarrow} \sqcap co(R_{\Rightarrow} \square R_{\Rightarrow}) \\
\mathcal{V}(right^{+}) &= R_{\Rightarrow} \\
\mathcal{V}(left) &= \mathcal{V}(right)^{-1} \\
\mathcal{V}(left^{+}) &= \mathcal{V}(right^{+})^{-1} \\
\phi(n, locpath_1) &= \exists n' : N.\mathcal{V}(locpath_1)(n, n') \\
\phi(n, fexpr_1\ and\ fexpr_2) &= \phi(n, fexpr_1) \wedge \phi(n, fexpr_2) \\
\phi(n, fexpr_1\ or\ fexpr_2) &= \phi(n, fexpr_1) \vee \phi(n, fexpr_2) \\
\phi(n, not\ fexpr_1) &= \neg\phi(n, fexpr_1)
\end{aligned}
$$

hierbij is $axis_1$ een zin voortgebracht door *axis*, $locpath_1$ een zin voortgebracht door *locpath*. ... P_i is een deelverzameling van tag–namen.

Stellingen uit de propositiecalculus

Stelling 1			$x \equiv x \equiv y \equiv y$
Stelling 2			1
Stelling 3	Reflexiviteit van $\equiv$		$x \equiv x$
Stelling 4			$y \equiv 1 \equiv y$
Stelling 5			$\neg x \equiv y \equiv x \equiv \neg y$
Stelling 6	Dubbele negatie		$\neg\neg x \equiv x$
Stelling 7	Negatie van 0		$\neg 0 \equiv 1$
Stelling 8			$(x \not\equiv y) \equiv \neg x \equiv y$
Stelling 9			$\neg x \equiv x \equiv 0$
Stelling 10	Symmetrie van $\not\equiv$		$(x \not\equiv y) \equiv (y \not\equiv x)$
Stelling 11	Associativiteit van $\not\equiv$		$((x \not\equiv y) \not\equiv z) \equiv (x \not\equiv (y \not\equiv z))$
Stelling 12	Onderlinge associativiteit		$((x \not\equiv y) \equiv z) \equiv (x \not\equiv (y \equiv z))$
Stelling 13	Onderlinge verwisselbaarheid		$x \not\equiv y \equiv z \equiv x \equiv y \not\equiv z$
Stelling 14	Opslorpend element van $\vee$		$x \vee 1 \equiv 1$
Stelling 15	Eenheidselement van $\vee$		$x \vee 0 \equiv x$
Stelling 16	Distributiviteit van $\vee$ t.o.v. $\vee$		$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee (x \vee z)$
Stelling 17			$x \vee y \equiv x \vee \neg y \equiv x$
Stelling 18	Symmetrie van $\wedge$		$x \wedge y \equiv y \wedge x$
Stelling 19	Associativiteit van $\wedge$		$(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$
Stelling 20	Idempotentie van $\wedge$		$x \wedge x \equiv x$
Stelling 21	Eenheidselement van $\wedge$		$x \wedge 1 \equiv x$
Stelling 22	Opslorpend element van $\wedge$		$x \wedge 0 \equiv 0$
Stelling 23	Distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\wedge$		$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$
Stelling 24	Contradictie		$x \wedge \neg x \equiv 0$
Stelling 25	Absorptie	(a)	$x \wedge (x \vee y) \equiv x$
		(b)	$x \vee (x \wedge y) \equiv x$
Stelling 26	Absorptie	(a)	$x \wedge (\neg x \vee y) \equiv x \wedge y$
		(b)	$x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$
Stelling 27	Distributiviteit van $\vee$ t.o.v. $\wedge$		$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Stelling 28	Distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$		$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
Stelling 29	De Morgan	(a)	$\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$
		(b)	$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$
Stelling 30			$x \wedge y \equiv x \wedge \neg y \equiv \neg x$
Stelling 31			$x \wedge (y \equiv z) \equiv x \wedge y \equiv x \wedge z \equiv x$
Stelling 32			$x \wedge (y \equiv x) \equiv x \wedge y$
Stelling 33	Vervanging		$(x \equiv y) \wedge (z \equiv x) \equiv (x \equiv y) \wedge (z \equiv y)$
Stelling 34			$x \equiv y \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
Stelling 35	Exclusieve of		$x \not\equiv y \equiv (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

Stelling 36	Alternatieve definitie van $\Rightarrow$		$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$
Stelling 37	Alternatieve definitie van $\Rightarrow$		$x \Rightarrow y \equiv x \wedge y \equiv x$
Stelling 38	Contrapositie		$x \Rightarrow y \equiv \neg y \Rightarrow \neg x$
Stelling 39			$x \Rightarrow (y \equiv z) \equiv x \wedge y \equiv x \wedge z$
Stelling 40	Distributiviteit van $\Rightarrow$ t.o.v. $\equiv$		$x \Rightarrow (y \equiv z) \equiv x \Rightarrow y \equiv x \Rightarrow z$
Stelling 41			$x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \equiv (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
Stelling 42	Aftakking		$x \wedge y \Rightarrow z \equiv x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
Stelling 43			$x \wedge (x \Rightarrow y) \equiv x \wedge y$
Stelling 44			$x \wedge (y \Rightarrow x) \equiv x$
Stelling 45			$x \vee (x \Rightarrow y) \equiv 1$
Stelling 46			$x \vee (y \Rightarrow x) \equiv y \Rightarrow x$
Stelling 47			$x \vee y \Rightarrow x \wedge y \equiv x \equiv y$
Stelling 48	Reflexiviteit van $\Rightarrow$		$x \Rightarrow x \equiv 1$
Stelling 49			$x \Rightarrow 1 \equiv 1$
Stelling 50			$1 \Rightarrow x \equiv x$
Stelling 51			$x \Rightarrow 0 \equiv \neg x$
Stelling 52			$0 \Rightarrow x \equiv 1$
Stelling 53	Verzwakken	(a)	$x \Rightarrow x \vee y$
		(b)	$x \wedge y \Rightarrow x$
		(c)	$x \wedge y \Rightarrow x \vee y$
		(d)	$x \vee (y \wedge z) \Rightarrow x \vee y$
		(e)	$x \wedge y \Rightarrow x \wedge (y \vee z)$
Stelling 54	Modus ponens		$x \wedge (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$
Stelling 55	Gevallenonderzoek		$(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \equiv (x \vee y) \Rightarrow z$
Stelling 56	Gevallenonderzoek		$(x \Rightarrow z) \wedge (\neg x \Rightarrow z) \equiv z$
Stelling 57	Wederzijdse implicatie		$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv x \equiv y$
Stelling 58	Antisymmetrie		$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Rightarrow (x \equiv y)$
Stelling 59	Transitiviteit	(a)	$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
		(b)	$(x \equiv y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
		(c)	$(x \Rightarrow y) \wedge (y \equiv z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

Stelling 60	Vervang p door q	(a)	$(p \equiv q) \wedge r[v := p] \equiv (p \equiv q) \wedge r[v := q]$
		(b)	$(p \equiv q) \Rightarrow r[v := p] \equiv (p \equiv q) \Rightarrow r[v := q]$
		(c)	$s \wedge (p \equiv q) \Rightarrow r[v := p] \equiv s \wedge (p \equiv q) \Rightarrow r[v := q]$
Stelling 61	Vervang door 1	(a)	$x \Rightarrow r[v := x] \equiv x \Rightarrow r[v := 1]$
		(b)	$y \wedge x \Rightarrow r[v := x] \equiv y \wedge x \Rightarrow r[v := 1]$
Stelling 62	Vervang door 0	(a)	$r[v := x] \Rightarrow x \equiv r[v := 0] \Rightarrow x$
		(b)	$r[v := x] \Rightarrow x \vee y \equiv r[v := 0] \Rightarrow x \vee y$
Stelling 63	Vervang door 1		$x \wedge r[v := x] \equiv x \wedge r[v := 1]$
Stelling 64	Vervang door 0		$x \vee r[v := x] \equiv x \vee r[v := 0]$