Examen wiskundige methoden in de fysica

Tweede bachelor fysica en sterrenkunde - 26 januari 2008, 8u30 - 12u30

Voor dit examen mag u de cursus gebruiken, alsook opgeloste oefeningen uit de les. Andere naslagwerken en rekenmachines zijn niet toegelaten. Begin voor elke vraag een nieuw antwoordenblad.

1 Laplacetransformatie

Gegeven is volgende differentiaalvergelijking:

$$y''(t) + 4y(t) = h(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1 \tag{1}$$

$$\text{met } h(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \pi) \\ 1 & (\pi \leq t < 2\pi) \\ 0 & (2\pi \leq t) \end{cases} \tag{2}$$

Dit stelt een ongedempte harmonische oscillator voor met uitwendige kracht $h(t)$.

a) Reken de Laplacegetransformeerde van de bronterm uit: $H(s) = \mathcal{L}[h(t)](s)$.

b) Transformeer de differentiaalvergelijking naar het Laplace-domein.

c) Los de vergelijking op naar $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.

d) Steun op de translatie-eigenschap voor Laplacegetransformeerden om de oplossing y(t) terug te vinden. Schets de oplossing voor $t \in [0, 4\pi]$.

2 Complexe contourintegratie

Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + x^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}, n > \alpha + 1 \tag{3}$$

die leeft op de positieve reële as $0 \leq x < +\infty$. De primitieve van deze functie geeft aanleiding tot hypergeometrische functies. De totale oppervlakte $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ onder de functie kan echter berekend worden via een complexe contourintegraal.

a) Maak een schets van het complexe vlak, met aanduiding van de verschillende delen van de integratiecontour die je zal gebruiken, eventuele polen, eventuele vertakkingslijnen die je invoert, en alle verdere informatie die je nodig acht.

b) Bereken de gevraagde oppervlakte. Geef duidelijk aan waar je de voorwaarden op de parameters α en n gebruikt.

- TIP 1: Het is mogelijk een contour te kiezen die slechts één pool bevat, hoewel dit niet noodzakelijk is om de oefening te kunnen oplossen.
- TIP 2: Bekijk snel de limiet $\lim n \to +\infty$. Voldoet je resultaat aan de verwachtingen?

3 Orthogonale polynomen

De Chebyshevpolynomen $T_n(x)$ (met $n \in \mathbb{N}$) worden gevonden als oplossingen op het interval $[-1,1]$ van

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \xi y(x) = 0 \tag{4}$$

a) Los deze vergelijking op met de methode van Frobenius.

b) Gebruik de test van Gauss om aan te tonen dat de oplossing divergeert voor $x \to \pm 1$ als er geen voorwaarde wordt opgelegd aan ξ. Leg de juiste voorwaarde op, die ξ relateert aan een natuurlijk getal n.

c) Maak gebruik van een stelling uit de cursus om de orthogonaliteit van de Chebyshevpolynomen aan te tonen:

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)w(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{als } m \neq n \tag{5}$$

voor een zekere gewichtsfunctie $w(x)$. Bepaal $w(x)$ expliciet.

4 Een potentiaalprobleem

Beschouw twee oneindig lange parallelle geleiders met cirkelvormige doorsnede, waarvan de elektrische potentiaal op de rand op respectievelijk $\phi = -1$ en $\phi = +1$ wordt gehouden. We berekenen nu de potentiaal ϕ en het elektrische veld $\vec{E} = -\nabla\phi$ in het gebied buiten de geleiders in een gepast coördinaatsysteem. Aangezien het probleem symmetrisch (invariant) is in de richting langs de geleiders, kunnen we het oplossen in twee dimensies. We voeren nu bipolaire coördinaten in:

$$x = \frac{a\sinh v}{\cosh v - \cos u}, \qquad y = \frac{a\sin u}{\cosh v - \cos u}, \tag{6}$$

met $u \in [0, 2\pi[$ en $v \in]-\infty, \infty[$. a is een reële, strikt positieve constante. Bemerk dat u periodiek is met periode 2π. De rand van de geleider met $\phi = -1$ stemt nu overeen met $v = -1$, en de rand van de geleider met $\phi = 1$ wordt beschreven door $v = 1$. De binnenzijde van de geleiders wordt gegeven door $|v| > 1$, en in dat gebied hoef je het potentiaalprobleem niet op te lossen!

a) Toon aan dat bipolaire coördinaten een orthogonaal systeem vormen, en bereken de schaalfactoren h_u, h_v. Steun op gekende algebraïsche identiteiten om eventuele uitdrukkingen in sin of sinh om te vormen naar cos en cosh.

b) De gezochte potentiaal is de oplossing van de tweedimensionele Laplacevergelijking $\Delta\phi = 0$. Transformeer deze vergelijking naar de nieuwe coördinaten. Geef tevens de randvoorwaarden in termen van u en v.

c) Gebruik de symmetrie van de randvoorwaarden om het probleem tot een eenvoudig ééndimensioneel vraagstuk te herleiden. Los de bekomen differentiaalvergelijking op en vind zo een uitdrukking voor de potentiaal ϕ.

d) Leid een uitdrukking voor $\vec{E} = -\nabla\phi$ af in de kromlijnige coördinaten.

Veel succes!