Academiejaar 2007-2008, 2 september 2008, 08.30u

Examen: Toepassingsgerichte Formele Logica 1

1. Gegeven zijn de volgende lambdacombinatoren:

$$\begin{array}{rcll} \textsf{\textbf{Tru}} & = & \lambda xy.x & \text{(waar)} \\ \textsf{\textbf{Fls}} & = & \lambda xy.y & \text{(vals)} \\ \textsf{\textbf{Not}} & = & \lambda xyz.xzy & \text{(negatie)} \\ \textsf{\textbf{And}} & = & \lambda xy.(xy\,\textsf{\textbf{Fls}}) & \text{(conjunctie)} \\ \textsf{\textbf{Or}} & = & \lambda xy.(x\,\textsf{\textbf{Tru}}\,y) & \text{(disjunctie)} \end{array}$$

   (a) Definieer, gebruik makend van bovenstaande lambdacombinatoren, een lambdacombinator **Imp** die zich gedraagt zoals implicatie in de propositiecalculus. Schrijf duidelijk op waaraan **Imp** gelijk is.

   (b) Toon aan dat **Imp** het gewenste gedrag vertoont door het herleiden van de lambdatermen **Imp Fls Fls**, **Imp Fls Tru**, **Imp Tru Fls** en **Imp Tru Tru** naar hun β-normaalvormen.

2. (a) Geef een calculationeel bewijs voor stelling 59(a)

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

   Je mag gebruik maken van de axioma's en van stellingen 1 t.e.m. 58 zonder deze afzonderlijk te bewijzen. Indien je gebruik wenst te maken van andere stellingen, dien je die wel uitdrukkelijk te bewijzen.

   (b) Wat bedoelt men wanneer men zegt dat het propositierekenen betrouwbaar is?

   (c) Is onderstaande gevolgtrekking geldig of niet? Staaf je antwoord met een calculationeel bewijs of een tegenvoorbeeld.

   > Als de initialisatie correct is en de lus eindigt, dan is de veranderlijke `jaartal` gelijk aan 2008. De veranderlijke `jaartal` is gelijk aan 2008. Dus, als de initialisatie correct is, dan eindigt de lus.

3. Heel wat problemen in de informatica komen neer op het zoeken van een object dat aan een aantal opgelegde criteria voldoet. Stel bijvoorbeeld dat een examenrooster moet worden opgesteld voor een aantal verschillende vakken, dan mag een auditorium op elk ogenblik aan ten hoogste één groep studenten toegekend worden, dan mag een student op elk ogenblik maar ten hoogste één examen hebben, dan wil men liefst voor elk vak slechts één keer een examen inrichten, dan wil men een minimum aantal dagen voorzien tussen twee examens van eenzelfde student, enz. Dikwijls zijn deze criteria echter tegenstrijdig en bestaat er geen enkel object dat perfect aan allemaal voldoet. In dat geval wordt typisch met elk criterium een gewicht geassocieerd dat aangeeft hoe belangrijk het is t.o.v. de andere criteria. Zo kan misschien niet voldaan worden aan het criterium dat tussen twee verschillende examens van dezelfde groep minstens twee dagen moet zitten, om te kunnen voldoen aan criteria met een hoger gewicht. Om de kwaliteit van verschillende objecten te kunnen vergelijken worden voor elk object

strafpunten bepaald. Deze strafpunten worden bekomen door de gewichten van alle criteria die niet voldaan zijn voor het object op een bepaalde manier samen te nemen tot één enkel getal. Zo kan bijvoorbeeld de som genomen worden van deze gewichten, maar er zijn ook nog tal van andere mogelijkheden.

In deze opgave veronderstellen we dat alle gewichten gekozen worden uit een eindige deelverzameling E van de reële getallen, waarbij we het kleinste element van E aanduiden als $\bot$ en het grootste element van E als $\top$. Voor elke e in E geldt dus $\bot \leq e$ en $e \leq \top$. Om gewichten samen te nemen gebruiken we een operator $\oplus$ die voldoet aan de volgende axioma's:

($\oplus$1) $\forall(e,f):E^2\,.\,e \oplus f = f \oplus e$

($\oplus$2) $\forall(e,f,g):E^3\,.\,(e \oplus f) \oplus g = e \oplus (f \oplus g)$

($\oplus$3) $\forall e:E\,.\,e \oplus \bot = e$

($\oplus$4) $\forall(e,f,g):E^3\,.\,e \geq f \Rightarrow (e \oplus g) \geq (f \oplus g)$

($\oplus$5) $\forall e:E\,.\,e \oplus \top = \top$

Bovendien is het meestal wenselijk dat de operator $\oplus$ strikt monotoon is, m.a.w. dat

$$\forall(e,f,g):E^3\,.\,e > f \,\wedge\, g \neq \top \Rightarrow (e \oplus g) > (f \oplus g)$$

Verder willen we vaak ook dat de operator $\oplus$ idempotent is, m.a.w. dat

$$\forall e:E\,.\,e \oplus e = e$$

(a) Veronderstel dat $E = \{0,1\}$, en dus $\bot = 0$ en $\top = 1$. Geef een voorbeeld van een operator $\oplus$ die voldoet aan de axioma's ($\oplus$1) t.e.m. ($\oplus$5), en die zowel strikt monotoon is als idempotent. Het is voldoende om te zeggen waaraan de operator $\oplus$ gelijk is, m.a.w. je moet niet aangetonen dat de operator aan de gevraagde eigenschappen voldoet.

(b) Zij nu E een eindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ die ten minste drie elementen bevat. Je kan er dus van uit gaan dat voor een zekere e_0 voldaan is aan $\bot < e_0$ en $e_0 < \top$. Onderstellen we bovendien dat $\oplus$ voldoet aan de axioma's ($\oplus$1) t.e.m. ($\oplus$5). Geef een calculationeel bewijs voor de volgende eigenschap: als $\oplus$ strikt monotoon is, dan is $\oplus$ niet idempotent.

(c) Geef, onder dezelfde voorwaarden, een calculationeel bewijs voor de volgende eigenschap: als $\oplus$ idempotent is, dan is $\oplus$ niet strikt monotoon.

4. Gegeven is de volgende Haskell-code:

```
fun1 x l = [y | y <- l, y `mod` x /= 0]
fun2 [] = []
fun2 (x:l) = x :  fun2 (fun1 x l)
```

Wat is de uitvoer van `fun2 [2..9]`?

Veel succes!