EXAMEN ELEKTROMAGNETISME
Academiejaar 2008-2009
1ste zittijd, 24 juni 2009

Theorie 1

We beschouwen een beperkt ladings-/stroomgebied, waarbinnen zich een puntlading q met baanvergelijking $\mathbf{r}_0(t)$ en bijhorende snelheid $\boldsymbol{\beta}(t)$ voorplant, en een waarnemer die zich ver buiten dit gebied bevindt. We gaan over van de tijdsrepresentatie naar de frequentieverdeling via een Fouriertransformatie als volgt, voor een willekeurige grootheid $X(\mathbf{r}, t)$,

$$X(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathbf{r},t) e^{i\omega t} dt \,, \qquad X(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathbf{r},\omega) e^{-i\omega t} d\omega \,, \tag{1}$$

i. De Maxwellvergelijkingen *buiten* het stroomgebied zijn dan simpelweg

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \,, \qquad & \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 \,, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) \,, \qquad & \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2}$$

waarbij de constitutieve wetten, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ gelden.

Wat zijn dan de bijhorende Maxwellvergelijkingen voor $\mathbf{E}(\omega)$ en $\mathbf{H}(\omega)$ in Fouriergedaante[1]?

ii. Men ($\neq$ u) bewijst dan dat de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\omega)$ kan geschreven worden als

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{q}{4\pi\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{e^{ikr}}{r} \boldsymbol{\alpha} \,, \tag{3}$$

in de stralingszone (i.e. in een $\frac{1}{r}$ benadering), met

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\beta}(t) e^{i\omega(t - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_0(t)/c)} dt \,, \qquad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{c_0} \,. \tag{4}$$

Gegeven dat in dezelfde benadering de energie uitgestraald per ruimtehoek, $\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega}$, gegeven wordt door,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = r^2 \int_0^{+\infty} d\omega \left(\mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}^*(\omega) + \mathbf{E}^*(\omega) \times \mathbf{H}(\omega) \right) \cdot \mathbf{e}_r \,, \tag{5}$$

bewijs dan dat

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int_0^{\infty} \omega^2 |\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\alpha}|^2 \, d\omega \tag{6}$$

in de stralingszone.

iii. Bespreek dan aan de hand van voorgaande formule zo volledig mogelijk het fenomeen van Cherenkovstraling, waarbij een puntlading q zich met constante snelheid $\mathbf{u}$ voortplant langsheen de z-as, zodat de oorsprong doorkruist wordt voor $t = 0$.

Theorie 2

Beschouw een gelokaliseerde, tijdsonafhankelijke stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, zonder bijhorende ladingsverdeling ($\rho \equiv 0$). We weten uit de algemene theorie van Greense functies dat de oplossing voor de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dan gegeven is door

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \,. \tag{7}$$

[1] Je hoeft niet telkens de $\mathbf{r}$-afhankelijkheid neer te schrijven.

Bespreek hiermee dan de multipoolontwikkeling van de vectorpotentiaal (t.e.m. de dipoolbijdrage). Voer in de loop van je betoog o.a. het magnetische dipoolmoment $\mathbf{m}$ in. Toon ook aan je definitie van $\mathbf{m}$ zich herleidt tot het gekende resultaat $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$ voor een gesloten vlakke stroomkring (met eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ en ingesloten oppervlakte S) waardoor een stroom met constante sterkte I loopt. Leid af, in deze benadering, dat de magnetische inductie $\mathbf{B}$ in de vorm $\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla} V_m$ kan gebracht worden.

Leg alle tussenstappen die je zet goed uit! Je mag gebruik maken van de (gereduceerde) Maxwellvergelijkingen,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} & = & 0\,, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} & = & \mu \mathbf{J}\,. \end{array} \right. \tag{8}$$

Oefening 1

Beschouw aan beide kanten een oneindig uitgestrekte schroeflijn met straal 1 waarlangs een constante stroom I loopt. Je mag hiervoor de volgende parametervoorstelling (i.f.v. λ) kiezen,

$$\begin{cases} x & = \cos \lambda \\ y & = \sin \lambda \\ z & = \lambda \end{cases} . \tag{9}$$

Bereken dan de magnetische inductie $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in de oorsprong, $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$.

Je mag gebruik maken van de volgende integralen,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{\cos q}{\sqrt{1+q^2}^3} \approx 1.204\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q \sin q}{\sqrt{1+q^2}^3} \approx 0.842\,. \tag{10}$$

Oefening 2

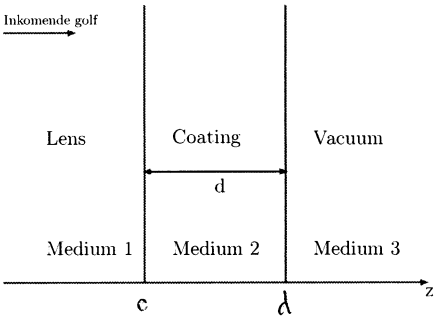
Beschouw volgende configuratie van vlakke golven (A en ω zijn constant).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = A e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{B} = \frac{A}{c} e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \mathbf{e}_y \end{array} \right. \tag{11}$$

Beschouw vervolgens een lens (medium 1) waarop een laag coating is aangebracht van dikte d (medium 2). Onderstel dat deze laag coating geen lading of stroom draagt. Vervolgens komen we in het vacuüm terecht (medium 3). Gegeven zijn de volgende materiaalconstanten,

$$\begin{array}{lll} \text{medium 1:} & c_1 = \dfrac{c_0}{2} & \mu_1 = 2\mu_0 \\ \text{medium 2:} & c_2 = \dfrac{c_0}{3} & \mu_2 = 4\mu_0 \\ \text{medium 3:} & c_3 = c_0 & \mu_3 = \mu_0 \end{array} \tag{12}$$

Onderstel nu dat een vlakke golf van het type (11) loodrecht invalt vanuit medium 1. Bepaal in termen van ω en c_0 de mogelijke diktes d van de laag coating zodat er geen gereflecteerde golf is in medium 1 voor een welbepaalde ω. Je mag onderstellen dat ω gelijk blijft bij transmissie of reflectie[2].



[2]Denk eraan dat er aan elke rand zowel reflectie als transmissie kan gebeuren. Elke golf kan je voorstellen d.m.v. het type (11).