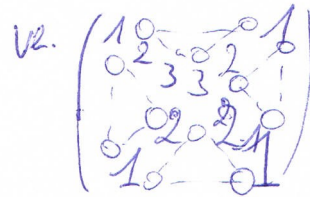


Numerieke Analyse 2008–2009. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Beschouw de matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $n = 2m$ even, en met:

- $a_{ii} = a_{n+1-i, n+1-i} = i$ voor $i = 1, 2, \dots, m$
- $a_{i, n+1-i} = a_{n+1-i, i} = i$ voor $i = 1, 2, \dots, m$



en alle andere matrixelementen nul. Bepaal de 2-norm $\|A\|_2$.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $n = 2m + 1$ oneven, en met $a_{i,j} = 0$ als aan één van de volgende twee voorwaarden voldaan is:

- $i < j$ en $i < m + 1$;
- $i > j$ en $i > m + 1$.

Deze speciale vorm van zo'n matrix wordt geïllustreerd voor $m = 3$ ($n = 7$):

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Neem aan dat het stelsel $Ax = b$ een unieke oplossing heeft. In dit geval kan het stelsel rechtstreeks opgelost worden door een geschikte combinatie van voorwaartse en achterwaartse substitutie. Geef een *algoritme in pseudocode* dat, gegeven A en b , de oplossing berekent. Hoeveel *elementaire rekenkundige bewerkingen* vraagt dit algoritme?

3. Bestaat er een monische vierdegraadsveelterm $p(t)$ waarvoor

$$M = \max_{t \in [-3, 1]} |(t + 1)p(t)|$$

minimaal is? Zo ja, bepaal $p(t)$ en geef de waarde van M .

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x) dx \approx Af(0) + Bf'(1) + Cf''(1).$$

- Bepaal A, B en C zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?
- Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.
- Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0, 1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.