Numerieke Analyse 2008–2009. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Beschouw de matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $n = 2m$ even, en met:

   Vb. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   - $a_{ii} = a_{n+1-i,n+1-i} = i$ voor $i = 1, 2, \ldots, m$
   - $a_{i,n+1-i} = a_{n+1-i,i} = i$ voor $i = 1, 2, \ldots, m$

   en alle andere matrixelementen nul. Bepaal de 2-norm $\|A\|_2$.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $n = 2m + 1$ oneven, en met $a_{i,j} = 0$ als aan één van de volgende twee voorwaarden voldaan is:

   - $i < j$ en $i < m + 1$;
   - $i > j$ en $i > m + 1$.

   Deze speciale vorm van zo'n matrix wordt geïllustreerd voor $m = 3$ $(n = 7)$:

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

   Neem aan dat het stelsel $Ax = b$ een unieke oplossing heeft. In dit geval kan het stelsel rechtstreeks opgelost worden door een geschikte combinatie van voorwaartse en achterwaartse substitutie. Geef een *algoritme in pseudocode* dat, gegeven A en b, de oplossing berekent. Hoeveel *elementaire rekenkundige bewerkingen* vraagt dit algoritme?

3. Bestaat er een monische vierdegraadsveelterm $p(t)$ waarvoor

$$M = \max_{t\in[-3,1]} |(t+1)p(t)|$$

   minimaal is? Zo ja, bepaal $p(t)$ en geef de waarde van M.

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf'(1) + Cf''(1).$$

   a) Bepaal A, B en C zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?
   b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.
   c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0, 1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.