

# EXAMEN ELEKTROMAGNETISME

Academiejaar 2009-2010

1ste zittijd, 14 juni 2010

## Theorie 1

Beschouw een bewegend puntdeeltje met massa  $m$  en lading  $q$ , waarbij de baan beschreven wordt door  $\mathbf{r}_0(t)$ . De waarnemer staat stil op positie  $\mathbf{r}$ . De algemene uitdrukkingen voor de opgewekte velden worden gegeven door<sup>1</sup>

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_v + \frac{q}{4\pi\epsilon c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^3 R} \right]_v,$$
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{n}]_v \times \mathbf{E},$$

waarbij de notatie  $[\dots]_v$  duidt op de gepaste tijdsvertraging:  $t = t' + R'/c$ . We hebben ook de volgende notaties ingevoerd:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), \quad \mathbf{n} = \mathbf{R}/R, \quad \kappa = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}.$$

OK ← (a.) Bespreek  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{B}$  voor een puntdeeltje dat eenparig rechtlijnig beweegt. Maak een duidelijke figuur.

2/5 (b.) Onderstel nu dat de lading zich voortplant in een eindig gebied<sup>2</sup>, en dat de waarnemer zich ver van dat gebied bevindt. Wat is dan een gepaste benadering voor  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{B}$ ?

OK ← (c.) Vervolgens beschouwen we op elk ogenblik  $t$  een boloppervlak met middelpunt in de vertraagde positie van de puntlading  $\mathbf{r}'_0$  en met straal  $R'$ , zodat de waarnemer zich op de rand van zo'n bol bevindt. Het uitgestraalde vermogen dat doorheen een oppervlakte-element  $dS$  van de bol in het waarnemingspunt vliegt, wordt gegeven door

$$d\mathcal{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}' dS,$$

met  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

Leid dan de volgende compacte uitdrukking af voor het uitgestraalde vermogen per eenheid van ruimtehoek:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} R'^2 E_a^2.$$

(d.) Bereken hiermee dan het totale uitgestraalde vermogen  $\mathcal{P}$  voor een traag bewegend deeltje.

## Theorie 2

Bij het opstellen van de vergelijking voor de potentialen, kwamen we tot de d'Alembertvergelijking,

$$\square \varphi(\mathbf{r}, t) \equiv \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t),$$

<sup>1</sup>Nodeloos te zeggen dat je dit *niet* hoeft af te leiden.

<sup>2</sup>Voor alle duidelijkheid, vanaf hier hebben we het niet langer over de eenparige rechtlijnige beweging.

waarbij  $c$  een constante is en  $f(\mathbf{r}, t)$  een gekende functie voorstelt. De bijhorende Greense functie  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  voldoet aan

$$\square G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (1)$$

OK

(a.) Leg uit hoe men m.b.v. (1) dan voor een willekeurige  $f(\mathbf{r}, t)$  de bijhorende oplossing  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  kan construeren.

(b.) In de onderstelling van een oneindige ruimte en tijd, bepaal dan stap voor stap de oplossingen<sup>3</sup> voor de Greense functie  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ .

Er is gegeven dat de algemene oplossing van de homogene d'Alembertvergelijking,

$$\square \varphi(\mathbf{R}, T) = 0,$$

met  $\mathbf{R}$  &  $T$  de plaats- & tijdscoördinaat, gegeven is door

$$\varphi(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{R} \left[ F_1 \left( \frac{R}{c} + T \right) + F_2 \left( \frac{R}{c} - T \right) \right], \quad R = |\mathbf{R}|,$$

OK  
relatieve snelde

met willekeurige functies  $F_1$  en  $F_2$ . Vergeet niet dit ook daadwerkelijk aan te tonen, waarbij bewijzen dat

3/5

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (xg), \quad \forall g(x)$$

nuttig kan zijn.

OK

## Oefening 1

Beschouw een schijfvormige plaat met middelpunt  $O$  en straal  $b$ . Op deze plaat bevindt zich een ladingsverdeling  $\sigma$ . Deze ladingsverdeling is echter niet constant, maar afhankelijk van de afstand tot het middelpunt:

4/5

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{voor } r < a \\ \kappa/r & \text{voor } a < r < b \end{cases}$$

(a.) Bepaal nu  $E$  en  $V$  op de symmetrie-as door  $O$ .

(b.) Neem de limiet  $b \rightarrow \infty$  voor beide grootheden. Wat merk je? Is dit inconsistent? Indien nee, motiveer waarom niet.

(c.) Bereken nu het monopoolmoment van de (eindige) schijf. Ontwikkel ook je vorig resultaat voor de potentiaal  $V$  voor grote  $z$  en vergelijk beide resultaten.

Opmerking: je mag gebruik maken van  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

## Oefening 2

Een vlakke elektromagnetische golf valt in op het scheidingsvlak tussen 2 media met dielektrische constanten  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  en permeabiliteit  $\mu_0$ . De invallende golf maakt een hoek  $\theta$  met de normaal op het scheidingsvlak, terwijl de invallende, respectievelijk teruggekaatste, golf een hoek  $\psi$  en  $\varphi$  maken met deze normaal. De corresponderende magnetische inducties staan aangeduid op de figuur, en worden voorgesteld door de volgende vlakke golven:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} & \text{(invallende golf)} \\ \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} & \text{(teruggekaatste golf)} \\ \mathbf{B}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_d e^{i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} - \omega_d t)} & \text{(doorgelaten golf)} \end{cases}$$

<sup>3</sup>De bespreking i.v.m. vertraagde/versnelde Greense functie hoeft je niet te geven.

2/5

OK

(a.) Stel uitdrukkingen op voor de eenheidsvectoren  $\mathbf{n}_{i,t,d} = \frac{\mathbf{k}_{i,t,d}}{k_{i,t,d}}$  in termen van de hoeken  $\theta, \psi, \varphi$ . Doe hetzelfde voor de amplitudevectoren  $\mathbf{b}_{i,t,d}$ . Merk op dat al deze vectoren in het  $(x, y)$ -vlak gelegen zijn!

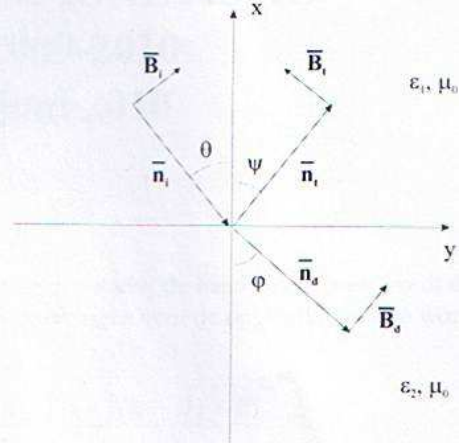
(b.) Toon aan via de Maxwellvergelijkingen en de randvoorwaarden voor de magnetische inductie  $\mathbf{B}$  dat

(b1.) de volgende verbanden tussen de hoeken gelden:

$$\theta = \psi, \quad \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta = \sqrt{\epsilon_2} \sin \varphi.$$

(b2.) de verhoudingen van de amplitudes van de magnetische inducties  $\frac{b_t}{b_i}$  en  $\frac{b_d}{b_i}$  kunnen uitgedrukt worden in termen van de hoeken  $\theta$  en  $\varphi$  als volgt:

$$\frac{b_t}{b_i} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)}, \quad \frac{b_d}{b_i} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\varphi + \theta)}.$$



Opmerking: we herinneren er nog aan dat  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ .