Voorbeeldexamen Wiskundige Methoden in de Fysica

1 Laplace-transformatie

Beschouw volgende differentiaalvergelijking voor $0 < x < \infty$:

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = f(x)$$

a) Los deze vergelijking op voor $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ en $f(x) = 0$ m.b.v een Laplace-transformatie. Gebruik hierbij voor de stap met de inverse Laplace-transformatie de tabel uit de cursus. Maak een schets van de oplossing.

b) Los deze vergelijking op voor $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ en $f(x) = \exp(-2t)$ door gebruik te maken van een Laplace-transformatie en haar eigenschappen. Maak opnieuw een schets van de oplossing.

2 Rand- en beginvoorwaardenprobleem

Beschouw een initiële deeltjesdichtheid $p_0(r, \phi)$ in een schijfvormige zone met straal a. De deeltjes diffunderen volgens

$$\partial_t p(r, \phi, t) = \Delta p(r, \phi, t).$$

De randen van de schijf zijn ondoordringbaar verondersteld voor de deeltjes.

a) Schrijf de gepaste fysische randvoorwaarden neer op $t = 0$ en $r = a$. Welke voorwaarden dient men op te leggen voor ϕ, in $r = 0$ en voor $t \to \infty$?

b) Druk de diffusievergelijking uit in poolcoördinaten en los ze formeel op door scheiding van veranderlijken $p(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$ en de randvoorwaarden toe te passen.

c) Bepaal de onbekende coëfficiënten in de algemen oplossing op basis van de deeltjesdichtheid $p_0(r, \phi)$ op $t = 0$. Je hoeft de orthogonaliteit van de basisfuncties niet expliciet te bewijzen, als je hiervoor een stelling uit de cursus kan gebruiken.

d) Herschrijf het diffusieprobleem met behulp van een Diracdistributie zodat de oplossing ervan de Greense functie voor dit probleem voorstelt. Bewijs hiervoor eerst dat de Diracdistributie in poolcoördinaten (r, ϕ) gevonden wordt als

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)$$

door ze in te laten werken op een voldoende brave testfunctie $f(\vec{r})$.

e) Geef de Greense functie voor dit probleem nu expliciet door de integralen uit (3) expliciet uit te werken, gebruik makende van de eigenschappen van de Dirac-deltafunctie.

3 Complexe contourintegratie

Bij de studie van fermionsystemen bij eindige temperatuur $T = 1/\beta$ treedt vaak de volgende niet-triviale reekssom op

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\beta}(2n+1)\right)^2+\omega^2} \tag{1}$$

a) Toon aan met behulp van een rechtstreekse toepassing van de residu-stelling dat deze som kan geschreven worden als de volgende contourintegraal

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z^2-\omega^2}\frac{1}{e^{\beta z}+1} \tag{2}$$

waarbij de contour C de volledige imaginaire as omcirkelt in wijzerzin.

b) Zoek een manier om bovenstaande contourintegraal, of dus de gezochte reekssom, uit te rekenen tot een gesloten uitdrukking, door het contour te hervormen, en gebruik te maken van de gekende eigenschappen en stellingen. Geef duidelijk aan welke stelling je in elke stap gebruikt en waarom dit toegelaten is.

Extra: Bovenstaande methode faalt in principe wanneer $\omega = 0$. Toch bekom je een resultaat dat een goedgedefinieerde limit $\omega \to 0$ heeft. Komt deze limiet overeen met het rechtstreekse resultaat dat je bekomt voor $\omega = 0$, als je de gezochte reekssom uitrekent met behulp van $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ en een slimme truc.

4 Orthogonale polynomen

In analogie met de Legendrepolynomen, worden de zogenaamde Chebyshevpolynomen $T_n(x)$ (met $n \in \mathbb{N}$) gevonden als oplossingen op het interval $[-1, 1]$ van

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \xi y(x) = 0 \tag{3}$$

a) Gebruik de methode van Frobenius om een recursieformule op te stellen. Aangezien we op zoek zijn naar veelterm-oplossingen, mag je de machtreeks laten starten bij graad $m \in \mathbb{N}$.

b) Welke voorwaarden moet je opleggen op de eigenwaarde ξ om ervoor te zorgen dat de bekomen reeks afbreekt?

c) Maak gebruik van een stelling uit de cursus om de orthogonaliteit van de Chebyshev-polynomen aan te tonen:

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)w(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{als } m \neq n \tag{4}$$

voor een zekere gewichtsfunctie $w(x)$. Bepaal $w(x)$ expliciet.