

Wiskundige Methoden in de Fysica herexamen

30 augustus 2010, 8u30

Het oefeningen examen is een open-boek examen. Verder hebt u geen nood aan rekenmachines, gsm's of eender welke vorm van elektronica.

1. De niet-lineaire term in de Navier-Stokes vergelijking luidt

$$\vec{\nabla} \times [\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})]$$

waar \vec{a} de snelheidsvector is van de vloeistof. Stroomt de vloeistof door een cilindrische buis volgens de as en heeft het vectorveld cilindersymmetrie,

$$\vec{a} = a(\rho)\vec{e}_z,$$

toon dan aan dat voor dit veld \vec{a} de niet-lineaire term nul wordt.

2. In opdracht van het Olympische roeiteam bestudeert u het effect van één roeibeweging op de voortbeweging van het vaartuig. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$x''(t) + bx'(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, x'(0) = v_0. \quad (1)$$

De aangelegde kracht $f(t)$ is hierbij gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ A & (t > 0, t < d) \\ 0 & (t \geq d) \end{cases} \quad (2)$$

met $A > 0, d > 0$.

- Bereken de Laplacegetransformeerde $F(s)$ van de bronterm $f(t)$.
- Zet de gegeven differentiaalvergelijking om naar het Laplacedomein, rekening houdende met de beginvoorwaarden.
- Los de bekomen algebraïsche vergelijking op naar $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$.
- Gebruik splitsen in partieelbreuken en de translatie-eigenschap om $x(t)$ terug te vinden voor $t > 0$.

3. Bereken de integraal

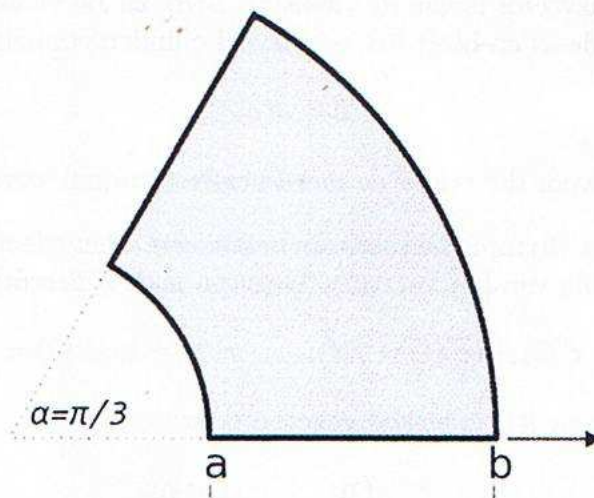
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

antwoord: π

Kies hiervoor een gepaste contour in het complexe vlak, horende bij de functie

$$\frac{1 - e^{2iz}}{4z^2}.$$

4. Bepaal de eigentrillingen van een membraan opgespannen over de vorm weergegeven in Figuur 1. De binnenstraal is a , de buitenstraal b en de openingshoek bedraagt $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



Figuur 1: (oefening 4)

Veel succes!