Examen Elektromagnetisme

Academiejaar 2010-2011
1e zittijd, 6 juni 2011

THEORIE 1

We beschouwen een vlakke golf in een diëlektricum die zich voorplant langs de richting $\mathbf{n}$, waarbij de golfvector gegeven is door $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. De algemene voorstelling voor de elektromagnetische velden kan in de volgende vorm geschreven worden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}e^{i\Omega} + \text{c.c.}\,, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}\,, \end{aligned}$$

met $\mathbf{a}$ een complexe vector. De fase Ω is gedefinieerd door $\Omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, waarbij $\omega = kc$ met c de lichtsnelheid in dit medium.

Toon eerst aan dat je $\mathbb{E}$ in de volgende vorm kan brengen:

$$\mathbb{E} = \mathbf{X}\cos\Omega + \mathbf{Y}\sin\Omega\,,$$

met $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ reële vectoren, en bespreek hiervan vertrekkend dan uitgebreid het begrip *polarisatie van een vlakke golf.*

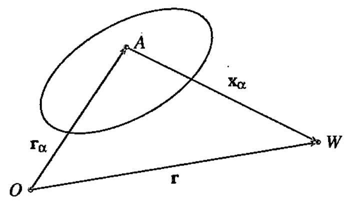
THEORIE 2

(i) Hoe kan je een uitgemiddelde grootheid $\langle F(\mathbf{r}, t)\rangle$ definiëren voor een microscopische grootheid $F(\mathbf{r}, t)$? Leg daarbij (kort) uit wat de fysische intuïtie is achter dergelijke uitmiddelingsoperaties.

We bekijken vervolgens een verzameling geladen deeltjes. Deze worden niet als puntdeeltjes opgevat maar nemen een klein gebiedje $\mathcal{V}_\alpha$ in rond een referentiepunt A met vectorcoördinaat $\mathbf{r}_\alpha$ vanuit een oorsprong O; hierbinnen leeft een ladingsdichtheid $\rho_\alpha(\mathbf{r}, t)$ en stroomdichtheid $\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t)$. De waarnemer in W heeft vectorcoördinaat $\mathbf{r}$, en we noteren de relatieve plaatscoördinaat als

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha,$$

zoals aangeduid op



De vectorpotentiaal, teweeggebracht door de stroom in het α^{de} gebiedje, is in het punt W gegeven door

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_\alpha} d^3\mathbf{r}' \left[\frac{\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{r}'|}\right]_v,$$

waarbij $\mathbf{r}'$ de integratiecoördinaat is in het gebiedje rond A, en $[\ldots]_v$ de gepaste inachtname van de tijdsvertraging voorstelt.

We hebben ook een microscopische stroom $\mathbb{J}_g(\mathbf{r}, t)$, opgewekt door de vrije ladingsdragers (geleidingselektronen).

(ii) Er ontbreekt nog een stroombijdrage in voorgaande modellering. Dewelke, en hoe stel je deze voor?

(iii) Bespreek vervolgens de overgang van de microscopische vectorpotentiaalbijdragen naar de gemiddelde totale vectorpotentiaal $\langle A(\mathbf{r}, t)\rangle$ door gebruik te maken van een dipoolbenadering. Voer daarbij o.a. het begrip polarisatie en magnetisatie van het medium in. Leg alle stappen die je zet (duidelijk) uit!

OEFENING 1

Zoals bekend, wordt de potentiële energie U van een lading Q in het veld van een andere lading q op afstand r van Q, gegeven door $U = QV_q(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Beschouw nu een *driedimensionaal*, oneindig uitgestrekt rooster met roosterafstand d waarop afwisselend ladingen $+q$ en $-q$ zijn geplaatst. Bepaal de ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r})$ en de potentiële energie U van 1 lading ten gevolge van de overige ladingen.

Je mag gebruik maken van de volgende Taylorontwikkeling:

$$\ln(1-x) = -x \overset{-}{\cancel{+}} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

en van de volgende afschattingen:

$$\sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{a+b}}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.289261\,, \qquad \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\sum_{c=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{a+b+c}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \approx -0.132476\,.$$

OEFENING 2

Onderstel dat de vectorfunctie $\mathbb{A}$ voldoet aan

$$\nabla^2\mathbb{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} = 0$$

waarbij $c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$ met ϵ en μ de materiaalconstanten van het beschouwde medium.

(i) Bewijs dat $\mathbb{E}$ en $\mathbb{B}$, gegeven door

$$\begin{cases} \mathbb{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) \\ \mathbb{B} = \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial\mathbb{A}}{\partial t} \end{cases}$$

een oplossing zijn van de bronvrije Maxwellvergelijkingen.

We onderstellen nu dat

$$\mathbb{A} = A\cos(\alpha x)\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{e}_z$$

met A, α en β constanten. Verder wordt op $x = -\frac{h}{2}$ en op $x = \frac{h}{2}$ een oneindige plaat gelegd.

(ii) Ga de voorwaarden na opdat de gegeven $\mathbb{A}$ aanleiding zou geven tot een elektromagnetische golf tussen beide platen, als er ondersteld wordt dat buiten de platen elektrisch noch magnetisch veld optreedt.

(iii) Bepaal de oppervlaktelading η_- (respectievelijk η_+) en oppervlaktestroom $\mathbb{K}_-$ (respectievelijk $\mathbb{K}_+$) van de plaat op $x = -\frac{h}{2}$ (respectievelijk $x = \frac{h}{2}$).

(iv) Bepaal de tijdsgemiddelde energiestroom $\langle\mathbb{S}\rangle_t$, waarbij $\mathbb{S}$ de Poyntingvector is en

$$\langle\mathbb{S}\rangle_t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{S}(t)dt$$