Examen Elektromagnetisme

Academiejaar 2010-2011
1e zittijd, 30 juni 2011

THEORIE 1

Gegeven zijn de Maxwellvergelijkingen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 , \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 , \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} ,$$

waarbij er mag van uitgegaan worden dat de constitutieve wetten gelden, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, naast de Ohm-relatie $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

(i) Leid de golfvergelijking af voor $\mathbf{E}$, en daarmee vervolgens de dispersierelatie, dit voor een monochromatische vlakke golf van het type $\mathbf{E} = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$.

(ii) Leg intuïtief uit wat er gebeurt ingeval ofwel ω ofwel $\mathbf{k}$ complex worden.

(iii) Los in beide voorgaande gevallen de dispersierelatie op, en bespreek, in het bijzonder de "slechte/goede geleider" limiet ingeval $\mathbf{k}$ complex is, waarvoor je mag aannemen dat deze de vorm $\mathbf{k} = (\alpha + i\beta)\mathbf{n}$ heeft. Het is *niet* nodig het begrip huiddiepte in te voeren. Je mag zonder bewijs aannemen dat $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

THEORIE 2

We beschouwen een beperkt ladings-/stroomgebied, waarbinnen zich een puntlading q met baanvergelijking $\mathbf{r}_0(t)$ en bijhorende snelheid $\boldsymbol{\beta}(t)$ voorplant, en een waarnemer die zich ver buiten dit gebied bevindt. We gaan over van de tijdsrepresentatie naar de frequentieverdeling via een Fouriertransformatie als volgt, voor een willekeurige grootheid $X(\mathbf{r}, t)$,

$$X(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt , \qquad X(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

(i) De Maxwellvergelijkingen *buiten* het stroomgebied zijn dan simpelweg

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) , & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 , \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) , & \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 , \end{aligned}$$

waarbij de constitutieve wetten, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ gelden.
Wat zijn dan de bijhorende Maxwellvergelijkingen voor $\mathbf{E}(\omega)$ en $\mathbf{H}(\omega)$ in Fouriergedaante[1]?

(ii) Men ($\neq$ u) bewijst dan dat de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\omega)$ kan geschreven worden als

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{q}{4\pi\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} \boldsymbol{\alpha} ,$$

in de stralingszone (i.e. in een $\frac{1}{r}$ benadering), met

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\beta}(t) e^{i\omega(t - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_0(t)/c)} dt , \qquad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{c} .$$

Gegeven dat in dezelfde benadering de energie uitgestraald per ruimtehoek, $\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega}$, gegeven wordt door,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = r^2 \int_0^{+\infty} d\omega \left(\mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}^*(\omega) + \mathbf{E}^*(\omega) \times \mathbf{H}(\omega) \right) \cdot \mathbf{e}_r ,$$

bewijs dan dat

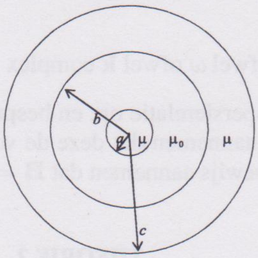
$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^\infty \omega^2 |\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\alpha}|^2 \, d\omega$$

in de stralingszone. Leg alles wat je doet goed uit!

(iii) Bespreek dan aan de hand van voorgaande formule zo volledig mogelijk het fenomeen van Cherenkovstraling, waarbij een puntlading q zich met constante snelheid $\mathbf{u}$ voortplant langsheen de z-as, zodat de oorsprong doorkruist wordt voor $t = 0$.

OEFENING 1

Een oneindig lange cilinder met straal a en permeabiliteit μ vervoert een stroom I . Deze keert terug via een coaxiale schil met binnenstraal $b\,(> a)$ en buitenstraal $c\,(> b)$ en permeabiliteit μ. Zie onderstaande figuur voor verduidelijking.



(i) Bepaal het magnetische veld $\mathbf{B}$. Maak hiervoor een onderscheid tussen de 4 verschillende gebieden. We onderstellen verder dat de stroom die in de twee gebieden $r < a$ en $b < r < c$ loopt, homogeen verdeeld is.

(ii) Bepaal nu de totale energiedichtheid W (= energie/volume).

(iii) Bereken tenslotte de totale energie per lengte-eenheid van deze constructie (= energie/lengte).

OEFENING 2

Beschouw de velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ gegeven door

$$\mathbf{E} = A e^{i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)}\mathbf{e}_x\,, \qquad \mathbf{B} = \frac{A}{c} e^{i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)}\mathbf{e}_y\,.$$

A en ω zijn constant. Op $z = 0$ wordt nu een vlakke plaat gelegd. Rechts van de plaat geldt $\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0$, links van de plaat is $\mu = \mu_0, \varepsilon = a\varepsilon_0$, met a een alsnog onbekende constante. Op deze plaat valt een vlakke golf, met amplitude A_I en hoekfrequentie ω_I, loodrecht in. Een gedeelte van de golf wordt teruggekaatst (amplitude A_T, hoekfrequentie ω_T), en een gedeelte wordt doorgelaten (amplitude A_D, hoekfrequentie ω_D). Stel de velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ voor de teruggekaatste en doorgelaten golf op. Gegeven is dat de verhouding van de amplitude van de teruggekaatste golf t.o.v. de amplitude van de invallende golf $\frac{1}{4}$ is, m.a.w. $\left|\frac{A_T}{A_I}\right| = \frac{1}{4}$. Bepaal hiermee de mogelijke waarden voor de constante a.