Wiskundige Methoden in de Fysica

examen, 28 januari 2014, 14u - 18u00

4) 1. De Maxwellvergelijkingen stellen dat het tijdsafhankelijke elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ en magnetische veld $\vec{B}(\vec{r},t)$ in de vrije ruimte voldoen aan:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\partial_t\vec{E}. \qquad (1)$$

Tevens wordt een vectorpotentiaal $\vec{A}$ gedefinieerd door $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, en een scalaire potentiaal ϕ door $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\partial_t\vec{A}$. Bovendien wordt de voorwaarde $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\partial_t\phi=0$ vervuld.

Bewijs dat de potentiaalvelden $\vec{A}$ en ϕ voldoen aan de golfvergelijking:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r},t)=\partial_t^2\vec{A}(\vec{r},t), \qquad \Delta\phi(\vec{r},t)=\partial_t^2\phi(\vec{r},t). \qquad (2)$$

5) 2. Toepassing van complexe contourintegratie

(a) Bereken $\int_0^{+\infty}\exp(-\sqrt{a^2+b^2}\,x)\mathrm{d}x$ via rechtstreekse integratie.

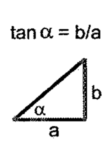
(b) Integreer de functie $f(z)=\exp(-\sqrt{a^2+b^2}\,z)$ over onderstaande contour, waarbij a en b strikt positieve reële getallen zijn. De straal van de cirkelsector moet in de limiet naar oneindig beschouwd worden; de openingshoek α bedraagt $\arctan(b/a)$.

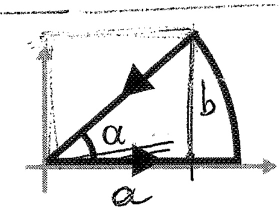
(c) De residustelling levert een algebraïsche vergelijking op waarin volgende reële integralen voorkomen:

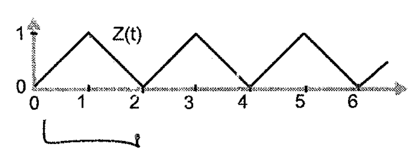
$$I_S=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x, \qquad I_C=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Hint: Als je tijdens de berekening een complex argument van de exponentiële functie tegenkomt, schrijf dat dan als een som.

(d) Ontbind de gevonden vergelijking in haar reëel en imaginair deel. Vind hieruit de waarden voor I_S en I_C.







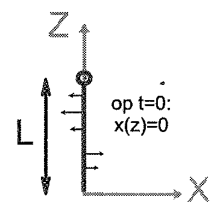
5) 3. Geef de Laplacegetransformeerde van de zaagtandfunctie $Z(t)$, die gedefinieerd is als de periodieke voortzetting van de functie

$$f(t) = \begin{cases} t & (t \in [0,1[), \\ 2-t & (t \in [1,2[). \end{cases} \tag{4}$$

6) 4. Een zwaar touw met lengte L is opgehangen aan zijn ene uiteinde, zoals aangeduid op de figuur. Op t=0 hangt het touw in verticale positie, met beginsnelheid $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$. Tijdens de beweging blijft het touw in het XZ-vlak; hierbij voldoet het aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(z,t) = g \frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial}{\partial z} x(z,t) \right) \tag{5}$$

waarbij g de valversnelling voorstelt. Volgende stappen leiden tot de oplossing van dit probleem.



(a) Welke randvoorwaarde moet voldaan zijn in het ophangpunt, waar $z = L$? Welke fysische eis kan je opleggen aan het vrije uiteinde bij $z = 0$? Wat zijn de twee beginvoorwaarden op $t = 0$?

(b) Voer de substitutie $r = 2\sqrt{z}$ door in de differentiaalvergelijking, waarbij je $x(z,t) = u(r,t)$ stelt. Gebruik de kettingregel om te vinden dat:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r,t) = g \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,t) + \frac{g}{r}\frac{\partial}{\partial r} u(r,t) \tag{6}$$

(c) Gebruik scheiding der veranderlijken om gewone differentiaalvergelijkingen te vinden voor $R(r)$ en $T(t)$.

(d) Los deze gewone differentiaalvergelijkingen expliciet op. Leg de rand- en beginvoorwaarden op om te komen tot een uitdrukking van de vorm

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n B(k_n r) C(\omega_n t). \tag{7}$$

Druk in je oplossing ω_n en k_n uit in functie van de constanten uit de opgave, en geef de functies B en C.

(e) Leg de beginvoorwaarde op om de nog onbekende coëfficiënten a_n te bepalen. Wat is de oplossing indien er enkel een ruk gegeven wordt aan het uiteinde van het touw ($v(z) = A\delta(z)$)?