Examen Elektromagnetisme

Academiejaar 2013-2014

1e zittijd, 26 juni 2014

THEORIE 1

Gegeven zijn de constitutieve wetten in het luchtledige

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases}$$

en de Maxwellvergelijkingen geschreven onder de vorm

$$\begin{cases} c^2 \nabla \times \mathbf{E} + c^2 \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

met $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$. We nemen de volgende complexe vlakke golfvoorstelling aan

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \end{cases}$$

Stel hiermee de dispersiewetten op voor longitudinale en transversale golven in een plasma, indien de bewegende ladingen en geassocieerde stromen gemodelleerd mogen worden door

$$\begin{cases} \rho = \sum_s N_s q_s, \\ \mathbf{J} = \sum_s N_s q_s \mathbf{v}_s, \end{cases}$$

met N_s, q_s en $\mathbf{v}_s$ de dichtheid, lading en snelheid per deeltjessoort s. Je mag aannemen dat het magnetisch veld $\mathbf{B}$ een constant magnetisch veld $\mathbf{B}_0$ is, gelegen volgens de voortplantingsrichting van de golven. Het kan nuttig zijn om tijdens uw betoog de gyrofrequentievector $\boldsymbol{\Omega}_s = \frac{q_s \mathbf{B}_0}{m_s}$, met geassocieerde grootte $\Omega_s = \frac{q_s B_0}{m_s}$ (met inbegrip van teken weliswaar), in te voeren.

Geef overal voldoende uitleg bij. Merk op dat het *niet* nodig is om speciale gevallen of Alfvéngolven te bespreken.

THEORIE 2

Beschouw een gelokaliseerde, tijdsonafhankelijke stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, zonder bijhorende ladingsverdeling ($\rho \equiv 0$). We weten uit de algemene theorie van Greense functies dat de oplossing voor de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dan gegeven is door

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' .$$

Bespreek hiermee dan de multipoolontwikkeling van de vectorpotentiaal (t.e.m. de dipoolbijdrage). Voer in de loop van je betoog o.a. het magnetische dipoolmoment $\mathbf{m}$ in. Toon ook aan je definitie van $\mathbf{m}$ zich herleidt tot het gekende resultaat $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$ voor een gesloten vlakke stroomkring (met eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ en ingesloten oppervlakte S) waardoor een stroom met constante sterkte I loopt. Leid af, in deze benadering, dat de magnetische inductie $\mathbf{B}$ in de vorm $\mathbf{B} = -\nabla V_m$ kan gebracht worden.

Leg alle tussenstappen die je zet goed uit! Je mag gebruik maken van de (gereduceerde) Maxwellvergelijkingen,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J} . \end{cases}$$