

Wiskundige Methoden in de Fysica

examen

8 januari 2014

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Geef je antwoord op vraag 1 op een apart antwoordblad.**

1. Bereken

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx, \quad -1 < \alpha < 1 \quad (1)$$

door een gepaste contour in het complexe vlak te kiezen. Vereenvoudig je resultaat tot een expliciet reële functie in α .

2. In een dun (2D) schijfje anisotroop hartweefsel wordt de dynamica van hartritme-stoornissen beïnvloed door de intrinsieke kromming R . Men bewijst dat R gegeven is door

$$R = A \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})) \quad (2)$$

met A de (constante) graad van anisotropie en $\vec{v}(x, y)$ de lokale spiervezelrichting.

Bereken R voor $\vec{v} = \cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\varphi$ met α constant en \vec{e}_r en \vec{e}_φ de basisvectoren van poolcoördinaten.

3. Los volgend stelsel van gekoppelde oscillatoren op met behulp van een Laplace-transformatie:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) + \sqrt{2}y(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) + 4y(t) - \sqrt{2}x(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 1$ en $\dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$. (Reken de inverse Laplacetransformatie uit met een methode naar keuze.)

4. a) Beschouw een cirkelvormig membraan met straal a , vastgeklemd op de rand, dat vanuit stilstand wordt losgelaten met een beginuitwijking

$$f(\rho, \varphi) = \begin{cases} \cos(2\varphi) & b < \rho < c \\ 0 & 0 \leq \rho \leq b \text{ of } c \leq \rho \leq a \end{cases} \quad (4)$$

Bereken de tijdsevolutie van het membraan, gebruik makende van de eigenschap

$$\int J_2(x) x dx = -2J_0(x) - xJ_1(x). \quad + 2 \quad (5)$$

b) Bewijs de eigenschap (5) hierboven door te steunen op recursierelaties en eigenschappen voor Besselfuncties van lage orde.

Veel succes!