Examen Elektromagnetisme: Theorie

Academiejaar 2014-2015

1ste zittijd, 29 mei 2015: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Behoudswetten

Beschouw de wetten van Maxwell in een isotroop medium:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{D} &= \rho \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{H} &= \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma\mathbf{E} \end{cases} \tag{1}$$

Door de Lorentzkracht wordt in een bepaald gebied $\mathscr{V}$ van de ruimte een verandering van de mechanische impuls veroorzaakt gegeven door de wet van Newton:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathscr{V}} \left(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}.$$

Het bijbehorende geleverde vermogen is gegeven door

$$\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathscr{V}} \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}.$$

1. Leid uit de wetten van Maxwell de behoudswet van lading af.
2. Gebruik de wetten van Maxwell en de constitutieve wetten om in detail aan te tonen dat
$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\right]$$
3. Gebruik deze gelijkheid in de uitdrukking voor het vermogen om een behoudswet voor energie aan te tonen: definieer de energiedichtheid van het elektromagnetisch veld en de vector van Poynting en bespreek de fysische betekenis van de verschillende termen.
4. Toon aan dat de Lorentz krachtdichtheid $\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ voldoet aan
$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathsf{T}$$
met
$$\mathbf{g}=\epsilon\mu\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \quad \mathsf{T}=\mathbf{B}\otimes\mathbf{H}+\mathbf{D}\otimes\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\mathbb{1}$$
5. Gebruik dit resultaat in de wet van Newton om een behoudswet voor impuls aan te tonen en bespreek opnieuw de fysische betekenis van de verschillende termen.
6. **Bonusvraag**: Leid uit de wet van behoud van lading af dat in een isotrope geleider ($\sigma \neq 0$) de volumeladingsdichtheid ρ steeds naar nul evolueert in de tijd.

Vraag 2: Multipoolontwikkeling van tijdsafhankelijke bronnen

Beschouw een tijdsafhankelijke ladings- en stroombron ($\rho(\mathbf{r}', t')$ en $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$) in een klein gebiedje rond de oorsprong, en beschouw een waarnemer op een positie $\mathbf{r}$ ver weg van de oorsprong. Allen bevinden zich in een isotroop, niet-geleidend medium met materiaalconstantes ϵ, μ, $\sigma = 0$ en $\epsilon\mu = 1/c^2$. De algemene uitdrukking voor de scalaire en vectorpotentiaal worden gegeven door

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \int \mathrm{d}t' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]_v, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \int \mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]_v. \end{aligned}$$

1. Gegeven is dat de bronnen slechts verschillend zijn van nul in een klein gebiedje om de oorsprong, waar $\mathbf{r}' \ll \mathbf{r}$. Benader $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ tot op eerste orde in r'/r.

2. Vul deze benadering in in de uitdrukking voor de scalaire potentiaal V; de twee termen geven aanleiding tot de zogenaamde monopool en dipoolterm. Deze kunnen uitgedrukt worden in termen van de van de totale lading $q(t)$ en het totaal dipoolmoment $\mathbf{p}(t)$ van de bron. Definieer deze grootheden en stel de monopoolterm en dipoolterm voor de scalaire potentiaal op. Welke extra benadering moet je hier hierbij maken?

3. Vul de benadering voor $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ uit puntje 1 tevens in in de uitdrukking voor de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$. Gebruik de wet van behoud van lading

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

   om aan te tonen dat de monopoolterm in de vectorpotentiaal kan geschreven worden in termen van $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t}$. De dipoolterm in de vectorpotentiaal kan geschreven worden met behulp van het totale magnetische dipoolmoment van de bron. Definieer deze grootheid en toon aan dat deze inderdaad opduikt in de dipoolterm.