

Wiskundige Methoden in de Fysica

examen

20 januari 2016

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Gebruik een eerste antwoordblad voor de oplossing van vragen 1 en 2 and een tweede antwoordblad voor de oplossing van 3 en 4.** Veel succes!

1. We berekenen via de volgende stappen de integraal

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx. \quad (1)$$

(a) Toon aan dat $I = (I_1 + I_2)/2$ met

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{LN}(x+i)}{1+x^2} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{LN}(x-i)}{1+x^2} dx. \quad (2)$$

(b) Bereken de waarde van I_1 en I_2 afzonderlijk via complexe contourintegratie. Leg eventuele vertakkingslijnen ver uit de buurt van je contour.

(c) Gebruik je uitkomsten uit het vorige puntje om de integraal I te berekenen.

2. Beschouw de speciale functie gekend als de 'exponentiële integraal':

$$E_1(t) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y} dy. \quad (3)$$

(a) Bereken met behulp van de **definitie** van de Laplacetransformatie dat

$$\mathcal{L}\{E_1(t)\} = \frac{\text{LN}(s) + \text{LN}(1+1/s)}{s} \quad (4)$$

Hint: Beschouw het gedrag van de optredende divergenties voor een integratiegrens $R \rightarrow \infty$.

(b) Gebruik nu de reeksontwikkeling

$$E_1(t) = -\gamma - \ln t - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n n!}, \quad (5)$$

met $\gamma = 0.5772 \dots$ de Euler-Mascheroni constante om $\mathcal{L}\{-\gamma - \ln t\}$ te bepalen. Maak hierbij gebruik van het vorige resultaat en de eigenschap

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad (6)$$

3. Beschouw het volgende krachtveld in bolcoördinaten:

$$\vec{F} = \frac{2P \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta, \quad r > 0 \quad (7)$$

met P een constante.

- (a) Bereken $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Betekent dit dat er een potentiaal bestaat (voor $r > 0$)?
 - (b) Bereken expliciet $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ voor een cirkel met straal 1 in het vlak $\theta = \pi/2$. Afhankelijk van dit resultaat alleen, kun je besluiten of het krachtveld conservatief is?
 - (c) Als je denkt dat er een scalaire potentiaal V bestaat voor \vec{F} zodat $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, vind dan een mogelijke potentiaal. Indien niet, motiveer dan waarom dergelijke potentiaal niet bestaat.
4. Een cilinder met hoogte l en straal a wordt op de boven- en onderkant op een potentiaal V gehouden die gegeven is door de functie $\psi(\rho, \phi)$ in cilindercoördinaten. Op de zijmantel is de potentiaal 0.
- (a) Bereken de potentiaal in de cilinder.
 - (b) Toon aan dat

$$\int_0^{\alpha_{0n}} \left(1 - \frac{y}{\alpha_{0n}}\right) J_0(y) y dy = \frac{1}{\alpha_{0n}} \int_0^{\alpha_{0n}} J_0(y) dy. \quad (8)$$

waarbij α_{0n} de nulpunten zijn van J_0 .

- (c) Neem nu $\psi(\rho, \phi) = 1 - \frac{\rho}{a}$ en gebruik het voorgaande om de potentiaal verder uit te werken.