Wiskundige Methoden in de Fysica
examen met modeloplossing

26 augustus 2016

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Gebruik een eerste antwoordblad voor de oplossing van vragen 1 en 2 and een tweede antwoordblad voor de oplossing van 3 en 4.** Veel succes!

1. Bereken de integraal
$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx \tag{1}$$
met behulp van complexe contourintegratie.

Hint Laat je leiden door de symmetrie van de noemer van het integrandum voor het kiezen van de contour. Leg eventuele vertakkingslijnen ver uit de buurt van je contour.

2. (a) Gegeven de integraalrepresentatie van de Besselfunctie
$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\cos\theta}\,d\theta. \tag{2}$$
Stel $\mathcal{L}\{J_n(t)\} \equiv g_n(s)$ en bereken de Laplacetransformatie $g_0(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\}(s)$ voor $s > 0$. Maak gebruik van
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \tag{3}$$

(b) Bereken nu $g_1(s)$ uit je vorig resultaat voor $g_0(s)$ door gebruik te maken van de gegeven recursierelatie $J_1(t) = -J_0'(t)$ en de eigenschappen van de Laplace transformatie.

(c) Vind ten slotte uit de Laplacetransformatie van de algemene recursieformule
$$J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2J_n'(t), \quad n \geq 1, \quad J_n(0) = 0, \tag{4}$$
een expliciete uitdrukking voor $g_2(s)$.

(d) Gebruik inductie om uit je oplossingen voor $g_0(s)$, $g_1(s)$ en $g_2(s)$ een algemene vorm voor $g_n(s)$ voorop te stellen die consistent is met de recursieformule (4).

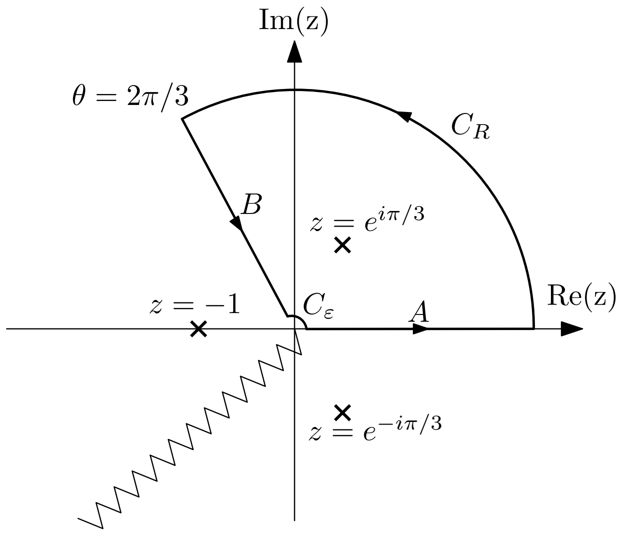
1. **Oplossing:**
De gezochte integraal

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1}\, dx \tag{5}$$

is singulier in $x = 0$, maar convergeert daar toch aangezien $\int dx \;\ln x = x \ln x - x + c$ en $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$. In het complexe vlak wordt deze singulariteit vertaald naar een vertakkingspunt $z = 0$, met een vertakkingslijn die van $z = 0$ loopt naar $z = \infty$. De contour moet dus het punt $z = 0$ vermijden en moet ook, gezien de reële integraal die we willen berekenen, het interval $(0, \infty)$ bevatten. Beschouw vervolgens de complexe contourintegraal

$$\oint f(z)\, dz = \oint \frac{\mathrm{LN}(z)}{z^3+1}\, dz, \tag{6}$$

met polen in $z^3 + 1 = 0 \iff z = -1, z = e^{i\pi/3}$ en $z = e^{-i\pi/3}$. Merk op dat voor de lijn $\theta = 2\pi/3$ in het complexe vlak, z^3 dezelfde waarden aanneemt als op de reële as aangezien $(r)^3 = r^3 e^{i2\pi}$. Dit maakt deze lijn een goeie keuze om in de contour op te nemen. Alle beschouwingen tot nu toe samengenomen, lijkt een contour zoals in Figuur 1 een verstandige keuze. We kiezen dus een contour $C = C_R \cup C_\varepsilon \cup A \cup B$ in tegenwijzerzin die de het interval $(0, \infty)$ bevat en rond $z = 0$ gaat. We leggen ook de vertakkingslijn ver uit de buurt van onze contour. We berekenen zo de reële integraal I, die we niet zomaar kunnen oplossen, als deel van een complexe contourintegraal die we wel kunnen oplossen!



Figuur 1: Contour voor de complexe contourintegraal Eq. 6.

Aangezien de pool $z = e^{i\pi/3}$ binnen de contour C ligt, zegt de residustelling dat

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=e^{i\pi/3}}[f(z)]. \tag{7}$$

We hebben ook dat

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_A f(z)\,dz + \int_B f(z)\,dz. \tag{8}$$

Voor de eerste term maken gebruik van de grote limietstelling voor een cirkelboog met middelpunt $z = 0$, straal R en middelpuntshoek $2\pi/3$. Hiervoor gaan we na dat

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{\mathrm{LN}(z)}{z^3+1} = \lim_{R\to\infty} \frac{Re^{i\theta}(\ln R + i\theta)}{R^3 e^{i3\theta}} = e^{-i2\theta} \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R^2} \overset{H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{1/R}{2R} = 0, \tag{9}$$

waarbij we L'Hôpital gebruikt hebben bij het berekenen van de limiet. Er volgt dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0, \tag{10}$$

zodat de bijdrage van C_R wegvalt voor $R \to \infty$.

Voor de tweede term gebruiken we de kleine limietstelling voor een cirkelboog met middelpunt $z = 0$, straal ε en middelpuntshoek $2\pi/3$. Hiervoor gaan we na dat

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\mathrm{LN}(z)}{z^3+1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon e^{i\theta}(\ln\varepsilon + i\theta)}{\varepsilon^3 e^{i3\theta}+1} = e^{i\theta} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln\varepsilon = 0, \tag{11}$$

zodat ook de bijdrage van C_ε wegvalt voor $\varepsilon \to 0$.

De derde term wordt voor $R \to \infty$ en $\varepsilon \to 0$ de gezochte integraal I ($z = x$):

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_A f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx, \tag{12}$$

terwijl de laatste term op een fasefactor na ook gerelateerd is aan I ($z = re^{i2\pi/3}$):

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_A f(z)\,dz &= \int_\infty^0 \frac{\ln r + i2\pi/3}{(re^{i2\pi/3})^3+1}\, e^{i2\pi/3}\,dr && (13)\\
&= -e^{i2\pi/3}\int_0^\infty \frac{\ln r + i2\pi/3}{r^3+1}\,dr && (14)\\
&= -e^{i2\pi/3} I - \frac{2\pi i}{3} e^{i2\pi/3} \int_0^\infty \frac{dr}{r^3+1}. && (15)
\end{aligned}$$

Maken we gebruik van

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \tag{16}$$

dan volgt voor vergelijking (8) uiteindelijk dat

$$\oint_C f(z)\,dz = \left(1 - e^{i2\pi/3}\right) I - \frac{2\pi i}{3} e^{i2\pi/3} \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right). \tag{17}$$

We hebben ook via (7) dat

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \mathrm{Res}_{z=e^{i\pi/3}}[f(z)] \tag{18}$$

$$= \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \frac{(z-e^{i\pi/3})\mathrm{LN}(z)}{z^3+1} \tag{19}$$

$$= \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \frac{\mathrm{LN}(z)}{(z+1)(z-e^{-i\pi/3})} \tag{20}$$

$$= \frac{\ln(1)+i\pi/3}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})} \tag{21}$$

$$= \frac{i\pi/3}{3e^{i2\pi/3}} = \frac{i\pi}{9}e^{-i2\pi/3} \tag{22}$$

Merk op dat kennis over de polen de berekening van de limiet sterk vereenvoudigt. Gelijkstellen van $\oint_C f(z)\,dz$ in (15) en (22) laat toe om op te lossen naar I:

$$\left(1-e^{i2\pi/3}\right)I - \frac{2\pi i}{3}e^{i2\pi/3}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) = (2\pi i)\frac{i\pi}{9}e^{-i2\pi/3}, \tag{23}$$

zodat we na vereenvouding uiteindelijk vinden dat

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx = -\frac{2\pi^2}{27}. \tag{24}$$

2. **Oplossing:**

(a) Gebruik de definitie van de Laplacetransformatie, verwissel de volgorde van integratie en integreer over t:

$$g_0(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dt\; e^{-st+it\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{s-i\cos\theta}. \tag{25}$$

Hierin herkennen we de gegeven integraal, zodat volgt dat

$$g_0(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-(i/s)\cos\theta} = \frac{1}{2\pi s}\frac{2\pi}{\sqrt{1-(i/s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}. \tag{26}$$

(b) We gebruiken de eigenschappen van de Laplacetransformatie om afleiden naar t in $J_1(t) = -J_0'(t)$ te vertalen naar het Laplace-beeld:

$$g_1(s) = -\left(sg_0(s) - J_0(0)\right) = -\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} - 1\right) = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}. \tag{27}$$

(c) Analoog als in het vorige puntje, maar nu toegepast op $J_{n+1}(t) = J_{n-1}(t) - 2J_n'(t)$, vinden we

$$g_{n+1}(s) = g_{n-1}(s) - 2\left(sg_n - J_n(0)\right) = g_{n-1}(s) - 2sg_n. \tag{28}$$

aangezien $J_n(0) = 0$ voor alle $n \geq 1$. We vinden $g_2(s)$ door $n = 1$ te stellen, zodat

$$g_2(s) = g_0(s) - 2sg_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} - 2s\frac{\sqrt{s^2+1} - s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{(\sqrt{s^2+1} - s)^2}{\sqrt{s^2+1}}. \tag{29}$$

(d) De resultaten voor g_0, g_1 en g_2 suggereren de volgende ansatz

$$g_n(s) = \frac{(\sqrt{s^2+1} - s)^n}{\sqrt{s^2+1}}. \tag{30}$$

Deze vorm voor g_n werkt al voor $n = 0, 1, 2$, dus we hoeven enkel de recursierelatie (28) na te gaan. Expliciete substitutie leidt inderdaad tot een identiteit (linker- en rechterlid gelijk), wat ons vermoeden bevestigt.

3. **Oplossing:**

(a)

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times (w\psi\vec{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_3}\partial_{\xi^3}\left(h_1 w\psi\right)\vec{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2}\partial_{\xi^2}\left(h_1 w\psi\right)\vec{e}_3, \tag{31}$$

(b)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (w\psi\vec{e}_1)\right) \tag{32}$$

$$= -\frac{1}{h_2 h_3}\left(\partial_{\xi^2}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\partial_{\xi^2}\left(h_1 w\psi\right)\right) + \partial_{\xi^3}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\partial_{\xi^3}\left(h_1 w\psi\right)\right)\right)\vec{e}_1 \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_3}\partial_{\xi^1}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\partial_{\xi^2}\left(h_1 w\psi\right)\right)\vec{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\partial_{\xi^1}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\partial_{\xi^3}\left(h_1 w\psi\right)\right)\vec{e}_3. \tag{34}$$

(c)

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + k^2\vec{A} = \vec{0}, \tag{35}$$

dus

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} - k^2 w\psi\vec{e}_1\right) = \vec{0}, \tag{36}$$

wat neerkomt op

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = k^2 w\psi\vec{e}_1 + \vec{\nabla}g. \tag{37}$$

4. **Oplossing:**

(a) Dit probleem wordt beschreven door de Laplacevergelijking $\nabla^2 V = 0$ (voor $r \leq a$) met randvoorwaarden

$$V(a,\theta,\phi) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V_0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \tag{38}$$

en periodieke randvoorwaarden in ϕ en een eindige potentiaal in de oorsprong (r=0).

(b) De randvoorwaarden zijn onafhankelijk van ϕ zodat we een axiaal symmetrische oplossing kunnen beschouwen. Dan volgt

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r V\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta V\right) = 0. \tag{39}$$

Substitutie van $V = R\Theta$ in bovenstaande vergelijking geeft

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 R'\right) = -\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \Theta'\right) = l(l+1). \tag{40}$$

We krijgen dus

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0 \tag{41}$$

en

$$\Theta'' + \cot\theta \Theta' + l(l+1)\Theta = 0. \tag{42}$$

(c) Door $R(r) = r^m$ te stellen wordt de radiale vergelijking

$$m(m+1) - l(l+1) = 0. \tag{43}$$

Een evidente oplossing is $m = l$. De andere oplossing kunnen we vinden door de vierkantsvergelijking voor m op te lossen, wat oplevert dat $m = -1/2 \pm (l + 1/2)$ Hieruit vinden we ook de tweede oplossing $m = -(l+1)$. Dus algemeen is

$$R(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}. \tag{44}$$

Dit kan ook via de methode van Frobenius of Laplacetransformatie worden gevonden. We weten ook dat de oplossing niet kan divergeren voor $r = 0$, dus $R = A_l r^l$.

Door $z = \cos\theta$ te stellen wordt de angulaire vergelijking

$$(1 - z^2)\Theta'' - 2z\Theta' + l(l+1)\Theta = 0, \tag{45}$$

waarvan de Legendrepolynomen $P_l(z) = P_l(\cos\theta)$ zijn. We weten dan dat $l \in \mathbb{N}$ moet zijn zodat de oplossing niet zou divergeren voor $\theta = 0, \pi$.

(d) Uit het voorgaande volgt:

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta). \tag{46}$$

(e) Als we $r = a$ nemen en V gelijkstellen aan de randvoorwaarden, dan kunnen we de factoren A_l vinden door te projecteren op $P_m(\cos\theta)$:

$$\begin{aligned} -V_0 \int_{-1}^{0} P_m(z)dz + V_0 \int_{0}^{1} P_m(z)dz &= \sum_{l=0}^{+\infty} A_l a^l \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ &= A_m a^m \frac{2}{2m+1}. \end{aligned} \tag{47}$$

We kunnen nog verder gebruik maken van het feit dat de Legendrepolynomen voor $l = 2n$ even zijn. Voor $l = 2n$ is het linkerlid hierboven gelijk aan nul, dus krijgen we finaal

$$V(r,\theta,\phi) = V_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (4n+3) \left(\int_0^1 P_{2n+1}(z)dz \right) \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta). \tag{48}$$