Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Academiejaar 2016-2017

1ste zittijd, 29 juni 2017: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Potentialen, ijkvrijheid en Euler-Lagrange vergelijkingen

Beschouw de wetten van Maxwell in een isotroop medium ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$).

1. We parameteriseren het elektrisch veld $\mathbf{E}$ en de magnetische inductie $\mathbf{B}$ in termen van potentialen V en $\mathbf{A}$ als

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad\qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1}$$

   Leid uit de vergelijkingen van Maxwell een stelsel gekoppelde vergelijkingen af voor $\mathbf{A}$ en V. (/ 1)

2. De parameterisatie van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in termen van V en $\mathbf{A}$ blijkt niet uniek te zijn. Wat is het meest algemene verband tussen $(V, \mathbf{A})$ en een ander koppel $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{A}})$ dat tot dezelfde $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zou leiden? (/ 1)

3. Kan je een specifieke voorwaarde op V en $\mathbf{A}$ opleggen zodat de gekoppelde vergelijkingen uit de eerste vraag ontkoppelen? Hoe zien de resulterende vergelijkingen voor $\mathbf{A}$ en voor V eruit? Toon ook expliciet aan dat je voor elke $(V, \mathbf{A})$ inderdaad een bijbehorende $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{A}})$ kan vinden die aan deze voorwaarde voldoet (/ 1).

4. Met behulp van de potentialen kunnen we de bewegingsvergelijking voor een puntdeeltje met massa m en lading e in het elektromagnetisch veld bekomen uit een Lagrangiaanse beschrijving met Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - eV + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}. \tag{2}$$

   Bepaal de Euler-Lagrange vergelijking die de actie bepaald door deze Lagrangiaan minimaliseert en toon aan dat deze inderdaad equivalent is aan de bewegingsvergelijking van Newton waarbij in het rechterlid de Lorentzkracht $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ staat. (/ 1)

5. Voer nu ook het canonisch toegevoegde momentum in en schrijf met behulp hiervan de bijbehorende Hamiltoniaan op (/ 1).

Vraag 2: Plasmagolven

Beschouw de wetten van Maxwell in vacuum ($\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$), die we zullen gebruiken om een plasma te modelleren door een geschikte keuzen van lading- en stroomdichtheid.

1. Elimineer $\mathbf{B}$ uit de vergelijkingen van Maxwell om zo een expliciete vergelijking voor $\mathbf{E}$ in function van $\mathbf{J}$ te bekomen. (/ 0.5)

2. We gaan nu op zoek naar basisoplossingen met een complexe vlakke golf voorstelling

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{3}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{4}$$

   met $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. Vul dit in in de golfvergelijking en splits deze in een stuk parallel met $\mathbf{n}$ en een stuk loodrecht op $\mathbf{n}$, bvb als $\mathbf{E} = E_{\parallel}\mathbf{n} + \mathbf{E}_{\perp}$. (/ 1)

3. Om een plasma te modelleren, veronderstellen we nu dat het bestaat uit een aantal soorten deeltjes s met massa m_s en lading q_s, alsook een dichtheid N_s die we in onze benadering constant veronderstellen. Verder veronderstellen we ladingsneutraliteit $\sum_s N_s q_s = 0$. We definiëren nu een plasmafrequentie $\omega_{p,s}$ per deeltjessoort als

$$\omega_{p,s} = \frac{N_s q_s^2}{\epsilon_0 m_s}.$$

   Verder leggen we een uitwending magneetveld $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{n}$ aan, in dezelfde richting als de golfvector, en definiëren we de gyrofrequentievector $\mathbf{\Omega}_s = \frac{q_s\mathbf{B}_0}{m_s}$ van deeltjessoort s. Gegeven het verband tussen stroom en elektrisch veld in de parallelle of longitudinale richting

$$J_{\parallel} = \frac{i\epsilon_0}{\omega}\sum_s \omega_{p,s}^2 E_{\parallel}, \tag{5}$$

   bespreek nu de longitudinale golven die in een plasma binnen deze benadering kunnen bestaan. Welke plasmadeeltjes zullen er hoofdzakelijk een bijdrage geven tot deze longitudinale golven indien het plasma bestaat uit elektronen en ionen met $m_{\text{elektron}} \ll m_{\text{ion}}$ en $q_{\text{elektron}} \approx q_{\text{ion}}$? (/ 1).

4. Bepaal nu ook de dispersie van transversale golven indien gegeven is dat in de transversale richting het verband

$$\mathbf{J}_{\perp} = \epsilon_0 \sum_s \omega_{p,s}^2 \frac{i\omega\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{\Omega}_s \times \mathbf{E}_{\perp}}{\omega^2 - \Omega_s^2} \tag{6}$$

   geldt. Bespreek ook hoe de dispersierelatie eruit ziet in afwezigheid van extern magnetisch veld ($\Omega_s = 0$). (/ 1.5)

5. Bepaal tot slot uit de dispersierelatie voor transversale golven de limiet voor lage frequenties $|\omega| \ll |\Omega_s|$, $\forall s$. Bereken de fasesnelheid en toon aan dat deze niet dispersief is. Hoe worden de golven in deze limiet genoemd? (/ 1)

Examen Elektromagnetisme: Oefeningen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Academiejaar 2016-2017

1ste zittijd, 29 juni 2017: 13u30 - 16u30

Oefening 1: Nieuwe Wet van Coulomb

Stel u voor dat nieuwe metingen aantonen dat de wet van Coulomb eigenlijk de volgende is:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)e^{-r/\lambda}\hat{\mathbf{r}}$$

λ is hier een nieuwe natuurconstante die extreem groot geacht mag worden.
Herformuleer elektrostatica, rekening houdend met deze nieuwe ontwikkeling.

1. Wat is het elektrisch veld $\mathbf{E}$ van een willekeurige ladingsverdeling ρ (/ 0.5)
2. Is het mogelijk een potentiaal te definiëren, analoog aan hoe we dat vroeger deden? Argumenteer. (/0.5)
3. Vind de elektrische potentiaal V voor een puntlading met lading q. (Neem $V = 0$ op oneindig) (/1)
4. Toon expliciet aan dat het elektrisch veld en de potentiaal van een puntlading voldoen aan

   $$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda^2}\int_V V d^3x = \frac{q}{\epsilon_0}$$

   Hierbij is S het oppervlak en V het volume van elke sfeer met lading q in haar centrum. (/1)
5. We willen nu aantonen dat bovenstaande uitdrukking geldt voor algemene volumes V met oppervlak S en voor algemene ladingsverdelingen ρ.

   $$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda^2}\int_V V d^3x = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho d^3x$$

   Deze vergelijking heeft een equivalente differentiaalvorm, die kan geïnterpreteerd worden als een veralgemening van de wet van Gauss, of na invulling van de elektrostatische potentiaal, als veralgemening van de Poisson vergelijking. Bepaal deze differentiaalvergelijkingen. (/1)
6. Toon expliciet aan dat aan deze differentiaalvergelijking is voldaan voor een puntlading in de oorsprong. Argumenteer ook waarom dit voldoende is om meteen te besluiten dat ze moet voldaan zijn voor elke ladingsverdeling? (/1)

Oefening 2: Oppervlaktestroom

Beschouw elektrisch neutrale plaat, gelegen in het x-y vlak, waardoor een tijdsafhankelijke uniforme stroom $K(t)\hat{\mathbf{y}}$ loopt.

1. Vind het elektrisch en magnetisch veld op een hoogte z boven het vlak voor het geval waar

   (a) een constante stroom $K\hat{\mathbf{y}}$ wordt aangezet op tijdstip $t = 0$. (/1)

   (b) een lineair toenemende stroom $\alpha t\hat{\mathbf{y}}$ wordt aangezet op tijdstip $t = 0$. (/1.5)

2. Toon aan dat de vertraagde vector potentiaal in volgende vorm geschreven kan worden:

$$\mathbf{A}(z,t) = \frac{\mu_0 c}{2}\hat{\mathbf{y}}\int_0^{+\infty} K\left(t - \frac{z}{c} - u\right) du$$

   en bepaal hiermee $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ als je weet dat $K(-\infty) = 0$. (/1.5)

3. Toon aan dat de totale energie per oppervlak die weggestraald wordt op tijdstip t gegeven wordt door

$$\frac{\mu_0 c}{2}[K(t)]^2.$$

   (/1)