Wiskundige Methoden in de Fysica examen met modeloplossing

24 januari 2017

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Gebruik een apart antwoordblad voor elke vraag. Schrijf je naam op elk blad!** Veel succes!

1. (4pt) Bewijs onderstaande operator-identiteiten, waarbij $\hat{\vec{L}} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ de kwantummechanische draaimoment**operator** is:

   (a) $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times\hat{\vec{L}}}{r^2}$

   (b) $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hat{\vec{L}}$

   Hint: Laat beide leden inwerken op een scalair veld f.

2. (6pt) Toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi^3}{8}, \tag{1}$$

   met behulp van complexe contourintegratie. Vertrek hiervoor van de volgende complexe contour integraal,

$$\oint \frac{\mathrm{LN}^3(z)}{1+z^2} dz. \tag{2}$$

   en leg de vertakkingslijn langs de positieve reële as.

   Hint: De binomiaalformule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en de integraal $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$ kunnen van pas komen.

3. (4pt) Bereken y(t) voor $t > 0$ die voldoet aan

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 100\exp(-2t) \tag{3}$$

   met $y(0) = -1$ en $y'(0) = 0$ via de Laplacetransformatie.

4. (6pt) We beschouwen een afgesloten rechthoekig gebied $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq y \leq b$ waarin een stof met concentratie $c(x, y, t)$ zich zal verspreiden met diffusiecoëfficiënt D. De initiële concentratie is $c_0(x)$ en er wordt stof toegevoegd aan een tempo $I(x, t)$.

   (a) Formuleer het probleem in een partiële differentiaalvergelijking, inclusief de rand- en beginvoorwaarden.

   (b) Welke voorwaarden zijn aanwezig die je toelaten om dit probleem op te lossen zonder y-afhankelijkheid?

   We lossen nu 3 verwante problemen op met toenemende moeilijkheidsgraad:

   (c) **Probleem 1**: Geef de algemene oplossing $c_1(x, t)$ van de homogene vergelijking (d.w.z. met bronterm $I(x, t) = 0$), via de methode van scheiden der veranderlijken. Hierin komen onbekende coëfficiënten a_n voor.

   (d) **Probleem 2**: Beschouw het diffusieprobleem met beginvoorwaarde $c(x, 0) = 0$ en een bronterm $I(x, t) = I\delta(t)H(a-x)$ met H de Heaviside stapfunctie. D.w.z. dat er stof wordt geïnjecteerd in het gebied $x < a$ op $t = 0$.

      i. Integreer de diffusievergelijking met deze bronterm tussen $t = -\epsilon$ en $t = +\epsilon$ met $\epsilon \to 0$, en gebruik dat $c(-\epsilon) = 0$. Waarom geldt dat $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\partial_x^2 c) dt = 0$?

      ii. Substitueer de algemene oplossing die je vond voor probleem 1 en bepaal zo de coëfficiënten a_n voor het huidige geval. Toon aan dat deze oplossing de vorm heeft van

$$c_2(x, t) = \frac{aI}{L} H(t) + \frac{2I}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n a}{k_n} H(t) \exp(-k_n^2 D t) \cos(k_n x) \tag{4}$$

      voor zekere k_n.

   (e) **Probleem 3**: Er vindt een constante injectie van stof plaats over het tijdsinterval $[0, T]$, aan een snelheid I. Door lineaire superpositie kan men inzien dat de oplossing van dit probleem gegeven wordt door

$$c_3(x, t) = \int_0^T dt_0 c_2(x, t - t_0). \tag{5}$$

      i. Bereken $c_3(x, t)$ uit het resultaat van probleem 2. Maak hierbij onderscheid tussen $t < T$ en $t > T$.

      ii. Wat zal de concentratieverdeling zijn voor $t \to +\infty$? Vind je dezelfde waarde door enkel de injectiesnelheid, duur en grootte van het gebied te beschouwen?

1. **vectoranalyse**

(a) (2pt)

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{L}} &= -i(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \\
\vec{\nabla} &= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r} \times \hat{\vec{L}}}{r^2} \\
\Leftrightarrow \vec{\nabla} &= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} - i(\frac{\vec{r} \times (-i(\vec{r} \times \vec{\nabla}))}{r^2}) \\
\Leftrightarrow \vec{\nabla} &= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla})}{r^2} \\
\Leftrightarrow \vec{\nabla} &= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) - \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{r})}{r^2} \\
\Leftrightarrow \vec{\nabla} &= \vec{\nabla} + \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})}{r^2} \\
\Leftrightarrow \vec{\nabla} &= \vec{\nabla}
\end{aligned}$$

(b) (2pt)

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{L}} &= -i \left\| \begin{matrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{matrix} \right\| \\
L_x &= i(z\partial_y - y\partial_z) \\
L_y &= i(z\partial_x - x\partial_z) \\
L_z &= i(x\partial_y - y\partial_x) \\
(\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}})_z &= iL_z \\
(\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}})_z &= L_xL_y - L_yL_x \\
L_xL_yf &= -(z\partial_y - y\partial_z)(z\partial_x - x\partial_z)f \\
&= -(z^2\partial^2_{xy}f - xz\partial^2_{yz}f - yz\partial^2_{xz}f - y\partial_xf + xy\partial^2_zf) \\
L_yL_xf &= -(z\partial_x - x\partial_z)(z\partial_y - y\partial_z)f \\
&= -(z^2\partial^2_{xy}f - xz\partial^2_{yz}f - yz\partial^2_{xz}f - x\partial_yf + xy\partial^2_zf) \\
\Rightarrow L_xL_y - L_yL_x &= y\partial_x - x\partial_y = i(i(x\partial_y - y\partial_x)) = iL_z
\end{aligned}$$

2. **Complexe contourintegratie** Toon aan dat

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi^3}{8}, \tag{6}$$

met behulp van complexe contourintegratie. Vertrek hiervoor van de volgende complexe contour integraal,

$$\oint \frac{\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2}\, dz. \tag{7}$$

en leg de vertakkingslijn langs de positieve reële as.

Oplossing:

Zoals gegeven, gaan we voor het berekenen van Eq. 6 uit van de complexe functie

$$f(z) = \frac{\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2}, \tag{8}$$

die een vertakkingspunt heeft in $z = 0$ en polen in $1 + z^2 = 0 \iff z = \pm i$. We leggen de vertakkingslijn langs de positieve reële as omwille van de integratiegrenzen (we zullen de gevraagde integraal halen uit een faseverschil langs de positieve reële as). Met deze informatie kiezen we een contour $C = C_R \cup C_{I\leftarrow} \cup C_\varepsilon \cup C_{I\rightarrow}$ die de positieve reële as tweemaal bevat (en dus de integraal I) (zie Fig. 1) en gesloten wordt op oneindig. We berekenen dus de reële integraal I, die we niet zomaar kunnen oplossen, als deel van de complexe contourintegraal

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C \frac{\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2}\, dz, \tag{9}$$

die we wel kunnen oplossen!

Aangezien de polen $z = \pm i$ binnen de contour C liggen, zegt de residustelling dat

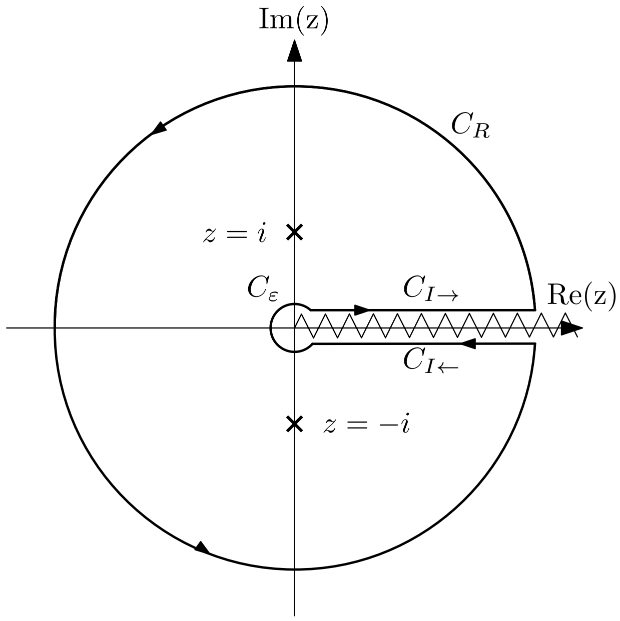
$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=i}[f(z)] + \mathrm{Res}_{z=-i}[f(z)]\right). \tag{10}$$

Maar we hebben ook dat

$$\oint_C f(z)\, dz = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{C_{I\leftarrow}} f(z)\, dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz + \int_{C_{I\rightarrow}} f(z)\, dz. \tag{11}$$

Voor de eerste term maken we gebruik van de grote limietstelling voor een cirkelboog met middelpunt $z = 0$, straal R en middelpuntshoek 2π. Hiervoor gaan we na dat

$$\lim_{z\to\infty} (z-0)\frac{\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta}\frac{(\ln R + i\theta)^3}{1+R^2 e^{i2\theta}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\ln^3 R}{R} \overset{H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}\ln^2 R}{1} = 0. \tag{12}$$



Figuur 1: Contour voor de complexe contourintegraal Eq. 9.

waarbij we L'Hôpital gebruikt hebben bij het berekenen van de limiet en enkel rekening hebben gehouden met de dominante termen voor $R \to \infty$. Er volgt dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0, \tag{13}$$

zodat de bijdrage van C_R wegvalt voor $R \to \infty$.

Voor de derde term maken we gebruik van de kleine limietstelling voor een cirkelboog met middelpunt $z = 0$, straal ε en middelpuntshoek -2π (gemeten in tegenwijzerzin). Hiervoor gaan we, gewapend met de gegeven binomiaalformule, na dat

$$\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon e^{i\theta} \frac{(\ln\varepsilon + i\theta)^3}{1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln^3\varepsilon + 3i\ln^2\varepsilon\theta - 3\ln\varepsilon\theta^2 - i\theta^3}{\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{14}$$

Na (herhaaldelijk) toepassen van L'Hôpital kunnen alle termen herleid worden tot termen van de vorm $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0$. Er volgt dat

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = 0, \tag{15}$$

zodat de bijdrage van C_ε wegvalt voor $\varepsilon \to 0$.

Voor $R \to \infty$ en $\varepsilon \to 0$, wordt het stuk $C_{I\rightarrow}$ boven de vertakkingslijn met de parametrizatie $z = x$ gelijk aan

$$\int_{C_{I\rightarrow}} f(z)\, dz = \int_0^\infty \frac{\ln^3 x}{1+x^2}\, dx, \tag{16}$$

terwijl voor het stuk $C_{I\leftarrow}$ onder de vertakkingslijn geldt dat

$$\int_{C_{I\leftarrow}} f(z)\,dz = -\int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^3}{1+x^2}\,dx. \tag{17}$$

We vinden dus dat, voor $R \to \infty$ en $\varepsilon \to 0$,

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\ln^3 x}{1+x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^3}{1+x^2}\,dx \tag{18}$$

$$= -6\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx + 12\pi \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + 8\pi^3 i \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \tag{19}$$

$$= -6\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx + 12\pi \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + 4\pi^4 i, \tag{20}$$

waar we de hints gebruikt hebben (binomiaalformule en $\arctan$-integraal).

De uitdrukking (20) moet gelijk zijn aan de som van de volgende residus,

$$\mathrm{Res}_{z=i}[f(z)] = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{LN}^3 z}{(z+i)} = \frac{(\ln(|i|) + i\pi/2)^3}{2i} = \frac{(i\pi/2)^3}{2i}, \tag{21}$$

$$\mathrm{Res}_{z=i}[f(z)] = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)\mathrm{LN}^3 z}{1+z^2} = \lim_{z\to -i} \frac{\mathrm{LN}^3 z}{(z-i)} = \frac{(\ln(|i|) + i3\pi/2)^3}{-2i} = \frac{(i3\pi/2)^3}{-2i}. \tag{22}$$

Merk op dat de hoek in tegenwijzerzin loopt van 0 tot 2π door de keuze van onze vertakkingslijn langs de positieve reële as. We krijgen dat

$$-6\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx + 12\pi \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + 4\pi^4 i = 2\pi i \left(\frac{(i\pi/2)^3}{2i} + \frac{(i3\pi/2)^3}{-2i} \right) \tag{23}$$

$$= \pi(-i\pi^3/8 + i27\pi^3/8) \tag{24}$$

$$= \frac{13\pi^4 i}{4}. \tag{25}$$

Hieruit leren we dat het reële deel gelijk moet zijn aan 0, wat impliceert dat

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0, \tag{26}$$

en dat voor het imaginaire deel moet gelden dat

$$-6\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx + 4\pi^4 i = \frac{13\pi^4 i}{4}, \tag{27}$$

wat betekent dat

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{6\pi i}\left(\frac{13 i\pi^4}{4} - \frac{16\pi^4 i}{4}\right) = -\frac{1}{6\pi i}\left(\frac{-3i\pi^4}{4}\right) = \frac{\pi^3}{8}. \tag{28}$$

3. **Integraaltransformatie** We starten met uitvoeren van de laplace transformatie en vullen de gegeven beginvoorwaarden in en herschrijven tot we een uitdrukking bekomen voor Y(s)

$$y'' + 4y' + 5y = 100\exp(-2t)$$
$$y(0) = -1$$
$$y'(0) = 0$$
$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) + s + 4 = \frac{100}{s+2}$$
$$Y(s) = \frac{\frac{100}{s+2} - (s+4)}{(s^2 + 4s + 5)}$$
$$Y(s) = \frac{100}{(s+2)((s+2)^2+1)} - \frac{(s+4)}{(s+2)^2+1}$$

Vervolgens dienen we te splitsen in partieel breuken :

$$\frac{100}{(s+2)((s+2)^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2+1} + \frac{Cs}{(s+2)^2+1}$$
$$100 = As^2 + 4As + 5A + Bs + 2B + Cs^2 + 2Cs$$
$$A = -C$$
$$-2A = B$$
$$5A + 2B = 100$$
$$\Leftrightarrow A = 100, B = -200, C = -100$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{100}{s+2} - \frac{204}{(s+2)^2+1} - \frac{101s}{(s+2)^2+1}$$

Gebruik maken van inverse laplace transformatie en volgende eigenschappen :

$$\bullet\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = \exp(-2t)$$
$$\bullet\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin(t)$$
$$\bullet\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-k}\} = \exp(kt)$$
$$\bullet\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = \cos(t)$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{100}{s+2} - \frac{204}{(s+2)^2+1} - 101(\frac{s+2-2}{(s+2)^2+1})$$

resulteert in y(t) :

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 100\exp(-2t) - 204\sin(t)\exp(-2t) - 101\exp(-2t)(\cos(t) - 2\sin(t)) = y(t)$$

4. **Oplossing:**

(a)
$$(\partial_t - D\partial_x^2)c = I(x,t), \tag{29}$$
De beginvoorwaarde is $c(x,y,0) = c_0(x,y)$ en als randvoorwaarden hebben we homogene Neumannrandvoorwaarden, dus $\partial_x c(0,y,t) = \partial_x c(l,y,t) = \partial_y c(x,0,t) = \partial_y c(x,b,t) = 0$.

(b) Rand- en beginvoorwaarden en de vergelijking zelf zijn invariant onder translaties in y, dus oplossing zal onafhankelijk zijn van y.

(c)
$$c_1(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{30}$$

(d)
$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \partial_t c dt = D\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \partial_x^2 c dt + IH(a-x)\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(t)dt \tag{31}$$
$$c(\epsilon) - 0 = D\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \partial_x^2 c dt + IH(a-x) \tag{32}$$
$$\lim_{\epsilon\to 0} c(\epsilon) = IH(a-x) \tag{33}$$
dus
$$\lim_{\epsilon\to 0} c_2(\epsilon,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = IH(a-x). \tag{34}$$
Doordat $\partial_x^2 c$ continu is voor $t < 0$ en $t > 0$ vinden we dat de oppervlakte onder een functie naar nul gaat als het domein waarover we integreren naar nul gaat. (Geen punten op zetten)

Door te projecteren op $\cos(\frac{m\pi x}{l})$ vinden we
$$a_m = \begin{cases} \frac{Ia}{l}, & m = 0 \\ \frac{2I}{l}\frac{\sin\left(\frac{m\pi a}{l}\right)}{m\pi}, & m \neq 0 \end{cases} \tag{35}$$
We moeten er ook nog voor zorgen dat $c_2 = 0$ voor $t < 0$ en dit kan eenvoudig door de gevonden oplossing te vermenigvuldigen met de Heaviside stapfunctie. Zo vinden we dus
$$c_2(x,t) = \frac{Ia}{l}H(t) + \frac{2I}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)}{n\pi}H(t)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{36}$$

(e) We werken de volgende integraal uit voor $n \neq 0$:

$$\int_0^T H(t-t') \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(t-t')\right) dt' = \tag{37}$$

$$H(T-t) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \int_0^t \exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt'\right) dt' + \tag{38}$$

$$H(t-T) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \int_0^T \exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt'\right) dt' = \tag{39}$$

$$H(T-t) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \frac{\exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) - 1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D} + \tag{40}$$

$$H(t-T) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \frac{\exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 DT\right) - 1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D}. \tag{41}$$

en gelijkaardig voor $n = 0$:

$$\int_0^T H(t-t') dt' = H(T-t)t + H(t-T)T. \tag{42}$$

Dus voor t <= T:

$$c_3(x, t \leq T) = \frac{IaT}{l} H(T-t)t + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2Il^2}{D} \frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)}{(n\pi)^3} \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \tag{43}$$

$$H(T-t)\left(\exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) - 1\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{44}$$

We krijgen dus:

$$c_3(x, t > T) = \frac{IaT}{l} H(t-T)T + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2Il^2}{D} \frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)}{(n\pi)^3} \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) \tag{45}$$

$$H(t-T)\left(\exp\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 DT\right) - 1\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{46}$$

(f) $\lim_{t \to +\infty} c(x,t) = \frac{IaT}{l}$.

Alternatieve oplossing:

(a)

$$(\partial_t - D\partial_x^2)c = f, \tag{47}$$

met $f(x,t) = IH(a-x)H(T-t)$ (H is de Heaviside stapfunctie). De beginvoorwaarde is $c(x,0) = c_0$ en als randvoorwaarden hebben we homogene Neumannrandvoorwaarden, dus $\partial_x c(0,t) = \partial_x c(l,t) = 0$.

(b) Als basisfuncties nemen we de oplossingen van het Sturm-Liouville probleem

$$-D\partial_x^2\phi_n = \lambda_n \phi_n, \tag{48}$$

met homogene Neumannrandvoorwaarden in $x = 0$ en $x = l$. Dus $\phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{l})$.

(c)

$$\dot{c}_n(t) + D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 c_n(t) = f_n(t), \tag{49}$$

waarvan de oplossing is:

$$c_n(t) = c_n(0)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right) + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(t-t')\right) f_n(t')dt'. \tag{50}$$

(d) De oplossing is dus:

$$\begin{aligned}
c(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\phi_n(x) && (51)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(0)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) && (52)\\
&+ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(t-t')\right) f_n(t')dt'\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) && (53)\\
&= c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 D(t-t')\right) f_n(t')dt'\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). && (54)
\end{aligned}$$

Om dit verder uit te werken moeten we dus eerst nog f_n berekenen:

$$\begin{aligned}
f_n(x,t) &= \frac{2-\delta_{n0}}{l}\int_0^l IH(a-x)H(T-t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx && (55)\\
&= \frac{2-\delta_{n0}}{l} IH(T-t)\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx && (56)\\
&= \begin{cases} IH(T-t)\frac{a}{l}, & n=0\\ 2IH(T-t)\frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)}{n\pi}, & n\neq 0\end{cases} && (57)
\end{aligned}$$

Dus:

$$c(x,t) = c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{58}$$

met

$$d_n(t) = \begin{cases} \frac{IaT}{l}\left(H(T-t)t + H(t-T)T\right), & n = 0 \\ \dfrac{2Il^2}{D}\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)}{(n\pi)^3}\Bigg[H(T-t)\left(\exp\left(\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 Dt\right)-1\right) & \\ \qquad +H(t-T)\left(\exp\left(\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 DT\right)-1\right)\Bigg], & n \neq 0 \end{cases} \tag{59}$$

(e) $\lim_{t\to+\infty} c(x,t) = c_0 + \frac{IaT}{l}$.