Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$$

Academiejaar 2017-2018

1ste zittijd, 31 mei 2018: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Potentialen, ijkvrijheid en Euler-Lagrange vergelijkingen

Beschouw de wetten van Maxwell in een isotroop medium ($\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$).

1. We parameteriseren het elektrisch veld $\mathbf{E}$ en de magnetische inductie $\mathbf{B}$ in termen van potentialen V en $\mathbf{A}$ als

$$\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad\qquad \mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \tag{1}$$

   Leid uit de vergelijkingen van Maxwell een stelsel gekoppelde vergelijkingen af voor $\mathbf{A}$ en V. (/ 2)

2. De parameterisatie van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in termen van V en $\mathbf{A}$ blijkt niet uniek te zijn. Wat is het meest algemene verband tussen $(V,\mathbf{A})$ en een ander koppel $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{A}})$ dat tot dezelfde $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zou leiden? (/ 2)

3. Kan je een specifieke voorwaarde op V en $\mathbf{A}$ opleggen zodat de gekoppelde vergelijkingen uit de eerste vraag ontkoppelen? Hoe zien de resulterende vergelijkingen voor $\mathbf{A}$ en voor V eruit? Toon ook expliciet aan dat je voor elke $(V,\mathbf{A})$ inderdaad een bijbehorende $(\tilde{V},\tilde{\mathbf{A}})$ kan vinden die aan deze voorwaarde voldoet (/ 2).

4. Met behulp van de potentialen kunnen we de bewegingsvergelijking voor een puntdeeltje met massa m en lading e in het elektromagnetisch veld bekomen uit een Lagrangiaanse beschrijving met Lagrangiaan

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2-eV+e\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}. \tag{2}$$

   Bepaal de Euler-Lagrange vergelijking die de actie bepaald door deze Lagrangiaan minimaliseert en toon aan dat deze inderdaad equivalent is aan de bewegingsvergelijking van Newton waarbij in het rechterlid de Lorentzkracht $\mathbf{F}=e(\mathbf{E}+\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})$ staat. (/ 2)

5. Voer nu ook het canonisch toegevoegde momentum in en schrijf met behulp hiervan de bijbehorende Hamiltoniaan op (/ 2).

Vraag 2: Lineaire antenne

1. Beshouw de volgende twee uitdrukkingen voor de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ opgewekt door een stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ in het vacuum met permittiviteit en permeabiliteit ϵ_0, μ_0 en $c_0 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(t - t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) \tag{4}$$

Hoewel beide voldoen aan de wetten van Maxwell, is er slechts één oplossing die fysisch correct is. Argumenteer welke. (/ 1)

2. Beschouw nu een dunne, lineaire antenne met lengte d gelegen volgens $\mathbf{e}_z$, gemodelleerd als:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = I\sin\left[k\left(\frac{d}{2} - |z|\right)\right]\delta(x)\delta(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathbf{e}_z, \quad \mathrm{met} |z| < \frac{d}{2} \tag{5}$$

met $\omega = kc_0$. Toon aan dat de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$ in het stralingsgebied ($r = |\mathbf{r}| \gg 1/k$) op basis van de fysisch juiste formule uit vorig punt kan benaderd worden door

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_z \tag{6}$$

Geef uitleg bij de tussenstappen van je bewijs. (/ 3)

3. Bepaal nu ook de velden $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ en $\mathbf{E}$ in het stralingsgebied. (/ 4)

4. Bepaal dan in de stralingszone het uitgestraalde tijdsgemiddelde vermogen per eenheid van ruimtehoek, waarbij je zonder bewijs gebruik mag maken van

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle_t = r^2\langle\mathbf{S}\rangle_t\cdot\mathbf{e}_r \quad \mathrm{met}\ \langle\mathbf{S}\rangle_t = \frac{1}{2}\Re\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right) \tag{7}$$

(/ 2)

Bonus: Gegeven dat $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ samen met de scalaire potentiaal $V(\mathbf{r},t)$ voldoen aan de Lorenz ijkvoorwaarde, kan je dan uit bovenstaande uitdrukking voor $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ in Eq. (6) een uitdrukking voor $V(r,t)$ bepalen? (/ 1)

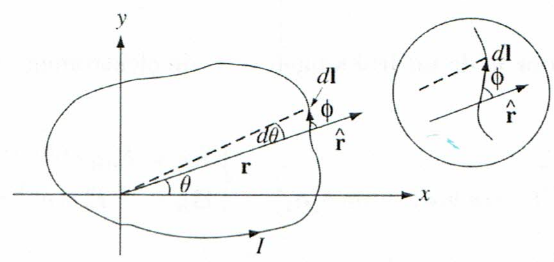
Examen Elektromagnetisme: Oefeningen

Academiejaar 2017 - 2018

1ste zittijd, 31 Mei 2018: 14u00 - 17u00

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\,.$$

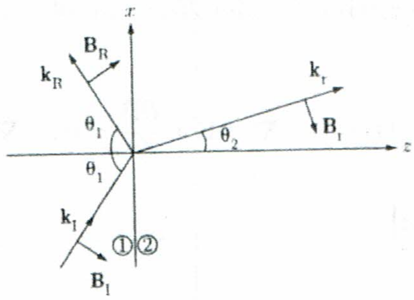
1 Statica [5 punten]



1. Gegeven is een dunne, uniform geladen kabel in de vorm van een halve cirkel met straal R. De totale lading op de kabel is Q. Vind het elektrisch veld E in het middelpunt van de halve cirkel. *Hint: maak een tekening van de halve cirkel.* [2 punten]
2. Beschouw een geleidende, vlakke lus (zie tekening) waardoor een constante stroom I loopt. De lus wordt beschreven door een vergelijking $r(\theta)$, waarbij r en θ poolcoordinaten in het vlak zijn. Bereken het magnetische veld B in de oorsprong van het vlak. Indien je correct gewerkt hebt, zie je dat $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\theta}{r} \hat{z}$. [2 punten]
3. Veronderstel dan dat $r(\theta)$ de vorm van een conische dwarsdoorsnede beschrijft en gegeven is door
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}\,,$$
met e en p positieve reële getallen. Hierbij geeft $e = 0$ je een cirkel, $0 < e < 1$ een ellips en $e = 1$ een parabool. Bereken nu voor deze lus, met algemene $0 \leq e \leq 1$, de uitdrukking voor B in de oorsprong. [1 punt]

2 Loodrechte Polarisatie [5 punten]

In de oefeningen hebben we de reflectie en transmissie van licht op/door een scheidingsvlak tussen twee lineaire media bestudeerd. Toen hebben we de aanname gemaakt dat elektromagnetische golf gepolariseerd was volgens de richting parallel aan het xz-vlak. In deze oefening gaan we het geval bestuderen waarbij de polarisatie loodrecht staat op dat vlak (zie tekening).



We helpen je op weg door je de uitdrukkingen voor de elektromagnetische golven te gegeven,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_I = \tilde{E}_{0I}\, e^{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, \mathbf{e}_y \\ \tilde{\mathbf{B}}_I = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0I}\, e^{i(\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(-\cos\theta_1\mathbf{e}_x + \sin\theta_1\mathbf{e}_z) \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_R = \tilde{E}_{0R}\, e^{i(\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, \mathbf{e}_y \\ \tilde{\mathbf{B}}_R = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R}\, e^{i(\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(\cos\theta_1\mathbf{e}_x + \sin\theta_1\mathbf{e}_z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_T = \tilde{E}_{0T}\, e^{i(\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, \mathbf{e}_y \\ \tilde{\mathbf{B}}_T = \frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0T}\, e^{i(\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-\omega t)}(-\cos\theta_2\mathbf{e}_x + \sin\theta_2\mathbf{e}_z) \end{cases}$$

waarbij de $\tilde{}$ gebruikt is om aan te geven dat de grootheden complex zijn.

1. Toon aan dat alle golf-vectoren in hetzelfde vlak liggen, dat $v_1 \sin\theta_2 = v_2 \sin\theta_1$ en leg uit waarom exponentiële factoren geen verdere rol spelen in randvoorwaarden op $z = 0$. [1 punt]

2. Toon via de randvoorwaarden op $z = 0$ aan dat
$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}$$
en dat
$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \alpha\beta\tilde{E}_{0T}$$
met $\alpha = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ en $\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$. [2 punten]

3. Werk nu de Fresnel vergelijkingen voor deze polarisatie uit. Herinner je dat deze vergelijkingen E_{0T} en E_{0R} geven in functie van E_{0I}. Toon aan dat, voor $\mu_1 \neq \mu_2$, er slechts een Brewsterhoek kan bestaan als $v_1 > v_2$ en $\mu_1 v_1 < \mu_2 v_2$ en bepaal de uitdrukking voor de waarde van deze Brewsterhoek. [2 punten]