# Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \quad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$$

Academiejaar 2017-2018

1ste zittijd, 27 juni 2018: 09u00 - 12u00

## Vraag 1: Sferische golven en de vectorpotentiaal van Hertz

Gegeven een isotroop diëlectricum met materiaalconstanten $\epsilon$ en $\mu$. We schrijven het elektrisch veld en de magnetische inductie in termen van de vectorpotentiaal van Hertz $\pi$ als

$$\mathbf{E}=\nabla\times(\nabla\times\pi)+\Box\pi, \qquad \mathbf{B}=\epsilon\mu\nabla\times\frac{\partial\pi}{\partial t}. \tag{1}$$

1. Gegeven dat de vectorpotentiaal van Hertz in een bronloos gebied voldoet aan $\Box\pi=\mathbf{0}$, toon aan dat de velden met bovenstaande definitie voldoen aan de 4 bronloze vergelijkingen van Maxwell. ( / 2)

2. Bereken de velden $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ voor alle $t$ en alle $\mathbf{r}\neq 0$, gegeven een vectorpotentiaal $\pi(\mathbf{r},t)=\mathbf{e}_z\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$ die voldoet aan $\Box\pi(\mathbf{r},t)=0$ voor alle $\mathbf{r}\neq 0$ en waarbij $\omega=kc$ en $c=(\epsilon\mu)^{-1/2}$. ( / 4)

3. Benader de velden uit vraag 2 in het golfgebied ($kr\gg 1$) en bespreek de belangrijkste eigenschappen. Leg in het bijzonder uit waarom de velden hier analoge eigenschappen hebben aan de velden van een transversale vlakke golf. ( / 2)

4. Benader de velden uit vraag 2 in het brongebied ($kr\ll 1$) en toon aan deze velden hier afkomstig lijken te zijn van een trillende dipool, i.e. een dipool met een tijdsafhankelijk (periodiek) dipoolmoment $\mathbf{p}=4\pi\epsilon e^{-ikct}\mathbf{e}_z$. ( / 2)

**BONUS:** Wat is de waarde van $\Box\pi(\mathbf{r},t)$ voor de vectorpotentiaal van Hertz uit vraag 2 indien je het punt $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ ook in rekening wil brengen? Bereken dan ook de ladingsdichtheid met behulp van $\rho(\mathbf{r},t)=\epsilon\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{R},t)$. Kan je dit resultaat relateren aan de trillende dipool uit vraag 4? ( / 1)

## Vraag 2: Potentialen van bewegende ladingen

De Greense functie leert dat de elektromagnetische potentialen opgewekt door een algemene lading- en stroomdichtheid $\rho(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ gegeven worden door

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3\mathbf{r}'\int dt'\,\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right),\\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}'\int dt'\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right). \end{aligned}$$

in een isotroop diëlectricum met materiaalparameters $\varepsilon$ en $\mu$ en lichtsnelheid $c=(\varepsilon\mu)^{-1/2}$. Beschouw nu een puntlading die zich voortbeweegt volgens de baan $\mathbf{r}_0(t)$ en dus een (tijdsafhankelijke) snelheid $\mathbf{u}(t)=\dot{\mathbf{r}}_0(t)$ heeft. Op elk ogenblik voldoet de snelheid aan $\|\mathbf{u}(t)\|<c$.

1. Wat is de lading- en stroomdichtheid $\rho(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ veroorzaakt door deze bewegende puntlading? ( /1)

2. Vul deze lading en stroomdichtheid in in bovenstaande uitdrukkingen en leidt hieruit de zogenaamde Liénard-Wiechert potentialen af voor een waarnemer op positie $\mathbf{r}$ en op tijdstip $t$. Hierbij mag je gebruik maken van volgende notatie ( /4)

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}_0(t) & \mathbf{r}'_0 \equiv \mathbf{r}_0(t') \\ \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{u}(t)/c & \boldsymbol{\beta}' \equiv \mathbf{u}(t')/c \\ \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 & \mathbf{R}' \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{n} \equiv \mathbf{R}/R & \mathbf{n}' \equiv \mathbf{R}'/R' \\ \kappa \equiv 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} & \kappa' \equiv 1 - \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n}' \end{array}$$

3. Leid met behulp van $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial \mathbf{A}/\partial t$ nu ook een uitdrukking af voor het elektrisch veld voor het specifieke geval van een eenparig rechtlijnige beweging, dus met $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0(t') + \mathbf{u}(t - t')$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' = \mathbf{u}/c$ en $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$. Schrijf de uitdrukking zodat duidelijk wordt dat het elektrisch veld de richting aanneemt van de vector $\mathbf{R}$ (en niet $\mathbf{R}'$) en dus gericht is van de ogenblikkelijke plaats van de lading naar de plaats van de waarnemer. ( /4)

4. Waar moet een waarnemer op een vaste afstand $R'$ zich bevinden om de grootste waarde van het elektrisch veld waar te nemen, met $R'$ de afstand tot de plaats waar de lading zich bevond toen de velden werden opgewekt? ( /1)