Wiskundige Methoden in de Fysica
examen

23 januari 2018

Voor dit examen krijg je 4u tijd en mag je de cursus en de oefeningenopgaven gebruiken. Niet toegelaten zijn opgeloste oefeningen, handboeken, rekenmachines en communicatiemiddelen. **Gelieve elke vraag op een apart blad te schrijven.** Veel succes!

1. Vectoranalyse. Bij de afleiding van het Pauliprincipe voor het electron (met lading e) komt men onderstaande operator tegen:

$$\hat{\vec{M}} = (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \times (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \tag{1}$$

met $\vec{A}$ de magnetische vectorpotentiaal en $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$. Toon aan dat voor een algemene scalaire functie ψ geldt dat $\hat{\vec{M}}\psi = ie\vec{B}\psi$ met $\vec{B}$ de magnetische inductie.

2. Complexe analyse. We bewijzen in 2 stappen dat

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right] = J_0(t) \tag{2}$$

a) Toon aan (zonder contourintegratie) dat integreren naar ϕ tussen $[0, \pi]$ van de Jacobi-Anger formule

$$e^{ix\cos\phi} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x)\cancel{e^{in\phi}}\ \cos n\varphi \tag{3}$$

leidt tot

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = J_0(x). \tag{4}$$

b) Bereken nu (2) via Bromwichintegratie.
Hint: kies de kortst mogelijke vertakkingslijn en leg je contour er net naast.

3. Laplacetransformatie van de cilindrische Besselfuncties. We veralgemenen nu het resultaat uit vraag 2 tot $J_n(t)$ met $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\left[J_n(t)\right] = j_n(s) = \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^n}{\sqrt{1+s^2}} \tag{5}$$

in de volgende stappen:

a) Gebruik $J_0'(t) = -J_1(t)$ om $\mathcal{L}[J_1(t)]$ te vinden.

b) Zet onderstaande recursierelaties voor Besselfuncties om naar het Laplacedomein:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x), \tag{6}$$
$$xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x) \tag{7}$$

Steun bij voorkeur op de eigenschappen van de Laplacetransformatie.

$n \geq 1$ ($n \in \mathbb{R}$) c) **Kies één van beide recursierelaties** en bewijs dat $j_n(s)$ gedefinieerd door (5) eraan voldoet.
Hint: je kan schrijfwerk beperken door $w = \sqrt{1+s^2} - s$ in te voeren.

4. Eigenmode-expansie. Bereken de stationaire temperatuursverdeling u(ρ, θ) binnen een homogene bol met straal a. De temperatuur op de rand van bovenste helft wordt op 1 gehouden; op de rand van de onderste helft is $u = 0$.

   (a) Stel de differentiaalvergelijking op die dit probleem beschrijft in bolcoördinaten, rekening houdend met de symmetrie uit figuur 1. Geef de randvoorwaarden in wiskundige vorm.

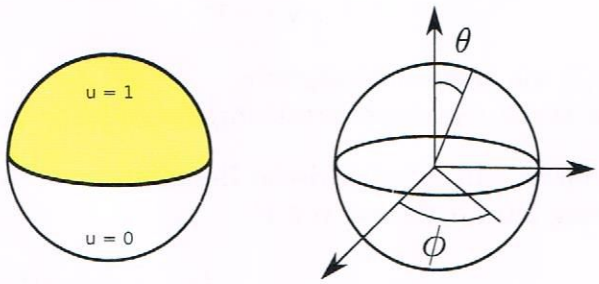
   (b) Herleid de partiële differentiaalvergelijking voor $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ tot een set van 2 gewone differentiaalvergelijkingen door scheiden in veranderlijken.

   (c) Los de vergelijking voor $\Theta(\theta)$ op, en behoud enkel fysische oplossingen. Gebruik de substitutie $x = \cos(\theta)$. Welke vorm neemt de scheidingsconstante aan?

   (d) Probeer voor $R(\rho)$ oplossingen van de vorm ρ^r. Bepaal 2 waarden voor de parameter r uit de scheidingsconstante en behoud de fysische oplossing.

   (e) Geef de algemene oplossing voor u met onbekende Fouriercoëfficiënten.

   (f) Gebruik de beginvoorwaarden om de coëfficiënten te bepalen. Vereenvoudig je uitdrukkingen met $F(m) = \int_0^1 P_m(x)dx$ en $\int_{-1}^1 (P_m(x))^2 dx = \frac{2}{2m+1}$.



Figuur 1: Geometrie van het probleem

Veel succes!