

Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Academiejaar 2018-2019

1ste zittijd, 28 mei 2019: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Potentialen, ijkvrijheid en Euler-Lagrange vergelijkingen

Beschouw de wetten van Maxwell in een isotroop medium ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$).

1. We parameteriseren het elektrisch veld \mathbf{E} en de magnetische inductie \mathbf{B} in termen van potentialen V en \mathbf{A} als

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1)$$

Leid uit de vergelijkingen van Maxwell een stelsel gekoppelde vergelijkingen af voor \mathbf{A} en V . (/ 1)

2. De parameterisatie van \mathbf{E} en \mathbf{B} in termen van V en \mathbf{A} blijkt niet uniek te zijn. Wat is het meest algemene verband tussen (V, \mathbf{A}) en een ander koppel $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{A}})$ dat tot dezelfde \mathbf{E} en \mathbf{B} zou leiden? (/ 0,5)
3. Kan je een specifieke voorwaarde op V en \mathbf{A} opleggen zodat de gekoppelde vergelijkingen uit de eerste vraag ontkoppelen? Hoe zien de resulterende vergelijkingen voor \mathbf{A} en voor V eruit? Toon ook expliciet aan dat je voor elke (V, \mathbf{A}) inderdaad een bijbehorende $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{A}})$ kan vinden die aan deze voorwaarde voldoet (/ 1).
4. Met behulp van de potentialen kunnen we de bewegingsvergelijking voor een puntdeeltje met massa m en lading e in het elektromagnetisch veld bekomen uit een Lagrangiaanse beschrijving met Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - eV + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}. \quad (2)$$

Bepaal de Euler-Lagrange vergelijking die de actie bepaald door deze Lagrangiaan minimaliseert en toon aan dat deze inderdaad equivalent is aan de bewegingsvergelijking van Newton waarbij in het rechterlid de Lorentzkracht $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ staat. (/ 1,5)

5. Voer nu ook het canonisch toegevoegde momentum in en schrijf met behulp hiervan de bijbehorende Hamiltoniaan op (/ 1).

Vraag 2: Golven in geleiders

Beschouw de wetten van Maxwell en constitutieve wetten in een isotrope geleider zonder ladingsdichtheid:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (3)$$

1. Leid de golfvergelijking af voor het elektrisch veld \mathbf{E} . (/ 0.5)
2. Bepaal aan de hand daarvan de dispersierelatie voor een monochromatische vlakke golf van het type $\mathbf{E} = \mathbf{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$. (/ 0.5)
3. Deze dispersierelatie heeft geen oplossingen waarbij zowel \mathbf{k} als ω reëel zijn. Bespreek intuïtief wat er gebeurt als \mathbf{k} OF ω complex worden? (/ 1)
4. Bepaal de oplossing van de dispersierelatie voor complexe $\mathbf{k} = (\alpha + i\beta)\mathbf{n}$ en reële ω . Bespreek de limiet van een goede en slechte geleider. Bereken de fasesnelheid en toon aan dat deze frequentie-afhankelijk is. (/ 1)
5. Bepaal hierbij nu ook de velden \mathbf{E} en \mathbf{B} , waarbij je zonder bewijs mag gebruik maken van $\mathbf{B} = \omega^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$. Bespreek de faseverschuiving tussen beide velden en bespreek ook het concept huideffect en huiddiepte. (/ 2)

BONUS: Een supergeleider heeft formeel $\sigma \rightarrow \infty$. Wat impliceert dit voor het elektromagnetisch veld in een supergeleider wanneer er van buiten af een elektromagnetische golf op invalt? (/ 1)