Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$$

Academiejaar 2018-2019

1ste zittijd, 26 juni 2019: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Magnetische multipoolontwikkeling

Beschouw een gelokaliseerde, tijdsonafhankelijke stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, zonder bijbehorende ladingsverdeling ($\rho(\mathbf{r})\equiv 0$). De vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ wordt uit de algemene theorie van Greense functies gegeven door

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'. \tag{1}$$

Gegeven dat de stroom $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ enkel verschillend is van nul op posities $\mathbf{r}'$ veel dichter bij de oorsprong dan de positie van de waarnemer $\mathbf{r}$ (dat is enkel voor $r'=|\mathbf{r}'|\ll r=|\mathbf{r}|$), dan kan je een multipoolontwikkeling opstellen door gebruik te maken van de voortbrengende functie van de Legendre veeltermen

$$\frac{1}{\sqrt{(1+(r'/r)^2-2(r'/r)\cos\theta}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}P_\ell(\cos\theta)=1+\frac{r'}{r}\cos\theta+\mathcal{O}\big((r'/r)^2\big). \tag{2}$$

1. Toon aan dat de monopoolterm $\mathbf{A}_0$ wegvalt. (/1)
2. Werk de dipoolterm $\mathbf{A}_1$ uit en schrijf deze in termen van het magnetische dipoolmoment $\mathbf{m}$ van de stroomverdeling, waarvoor je de definitie zelf moet invoeren (/2,5).
3. Bereken het magnetische dipoolmoment voor een vlakke stroomkring met stroomsterkte I die loopt omheen een vlak gebied met oppervlakte S en eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ (/0,5).
4. Bereken voor de dipoolbenadering $\mathbf{A}_1$ ook de bijbehorende magnetische inductie $\mathbf{B}_1=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_1$ en toon aan dat je die kan schrijven als een gradient $\mathbf{B}_1=-\boldsymbol{\nabla}V_m$ van een scalaire magnetische potentiaal V_m. (/1).

Vraag 2: Golven in anisotrope media

Beschouw de bronloze Maxwell vergelijkingen

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{4}$$

in een medium met een anisotrope permittiviteit $\boldsymbol{\varepsilon}$ en een isotrope permeabiliteit μ in de constitutieve wetten $\mathbf{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$.

1. Stel een golfvergelijking op voor het elektrisch veld $\mathbf{E}$ (/0,5).

2. Onderzoek basisoplossingen van de vorm $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ of $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t)$. Werk hiertoe in keuze van het assenstelsel waarin $\boldsymbol{\varepsilon}$ diagonaal is, i.e.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

en voor karakteristieke snelheden $c_i = (\epsilon_i \mu)^{-1/2}$ voor $i = 1,2,3$ in. Leidt een dispersievergelijking af die $\omega = vk$ in functie van $\mathbf{k} = \mathbf{n}k$ beschrijft en bespreek het zogenaamde golfoppervlak van Fresnel en het concept van de zogenaamde optische assen (/2).

3. Bij elke generieke $\mathbf{k}$ horen volgens het golfoppervlak van Fresnel twee oplossingen v' en v''. Onderzoek de bijbehorende elektromagnetische velden, die allen dezelfde ruimte- en tijdsafhankelijkheid zullen hebben als het elektrisch veld $\mathbf{E}$. Toon aan dat $\mathbf{H}' \parallel \mathbf{B}' \perp \mathbf{D}' \perp \mathbf{n}$ en $\mathbf{H}'' \parallel \mathbf{B}'' \perp \mathbf{D}'' \perp \mathbf{n}$ (voor elk van beide oplossingen: magnetisch veld parallel aan magnetische inductie, loodrecht op dielektrische verplaatsing, en beide loodrecht op voorplantingsrichting van de golf). Toon in het bijzonder aan dat $\mathbf{D}' \perp \mathbf{D}''$ (dielektrische verplaatsing van beide oplossingen onderling loodrecht) en dat $\mathbf{E}'$ in het vlak ligt opgespannen door $\mathbf{D}'$ en $\mathbf{n}$ (analoog ligt $\mathbf{E}''$ in het vlak van $\mathbf{D}''$ en $\mathbf{n}$). Wat is de naam van dit vlak? (/2,5).

BONUS: Stel dat ook de permeabiliteit $\boldsymbol{\mu}$ anisotroop zou zijn, maar zodanig dat ze in dezelfde basis (in hetzelfde assenstelsel) als $\boldsymbol{\varepsilon}$ diagonaal is. Er geldt dus gelijktijdig

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Kan je bovenstaande analyse nog steeds gebruiken? Is het voldoende om karakteristieke snelheden $c_i = (\epsilon_i \mu_i)^{-1/2}$ in te voeren voor $i = 1,2,3$.

Examen Elektromagnetisme: Oefeningen

Academiejaar 2018 - 2019

1e zittijd, 25 juni 2019: 13u30 - 16u30

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\,.$$

1 Dood, maar niet gereflecteerd? [5 punten]

Lotte, een betweterige vampier, beweert dat ze geen spiegelbeeld heeft. In deze oefening tonen we aan dat dit onmogelijk is voor een geïdealiseerde spiegel. We beshouwen hiertoe een vlakke golf (met $\omega = ck$) die propageert door het vacuum en loodrecht invalt op een glazen laag ($c_{\text{glas}} = \frac{c}{2}$, $\mu_{\text{glas}} = \mu_0$, dikte $L > 0$ en oneindig groot) over een perfecte electrische geleider (PEC). Op een PEC moet het electrisch veld loodrecht invallen, en deze laat geen golven door.

1. De eerste stap bestaat erin om uit te zoeken welke elektromagnetische velden aanwezig zullen zijn in het vacuum en in het glazen medium. Stel een algemene uitdrukking op voor het elektrisch veld en de bijbehorende magnetische inductie. Schrijf ook op aan welke randvoorwaarden het systeem moet voldoen. [/ 3]

2. Elimineer uit de bekomen vergelijkingen de velden in het medium, zodat je een relatie bekomt tussen de invallende en gereflecteerde golf in het vacuum. Toon aan dat deze dezelfde amplitude hebben [/ 1].

3. Bepaal voor de velden in vacuum, i.e. de invallende en gereflecteerde golf, de tijdsgemiddelde vector van Poynting. Hiervoor moet je de relatie tussen de invallende en gereflecteerde golf uit vorige vraag niet gebruiken en kan je beide componenten als vrije parameters laten staan. [/ 0,5]

4. Het is ook mogelijk om aan te tonen dat de invallende en gereflecteerde golf in het vacuum dezelfde amplitude moeten hebben, door behoud van (tijdsuitgemidelde) energie. Kies daartoe eerst een volume doorheen de drie media (vacuum, glas en PEC) waaruit je kan besluiten dat de (tijdsuitgemiddelde) vector van Poynting in vacuum moet verdwijnen, en toon aan dat dit de gelijkheid van invallende en gereflecteerde amplitude impliceert met behulp van vorig resultaat. [/ 0,5]

2 Statica en multipoolmomenten [5 punten]

Beschouw een halve bol met straal R die een oppervlakteladingsdichtheid draagt als volgt:

$$\sigma(\phi,\theta) = \begin{cases} \sigma_0 \sin(\phi), & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

met hier ϕ en θ de hoeken van het sferische coordinatensysteem.

1. Bepaal de monopool en dipoolbijdrage tot de elektrostatische potentiaal. [/ 1]

2. Verklaar vanuit de symmetry van de ladingsdichtheid intuïtief de richting en zin van het dipoolmoment. [/ 0,5]

3. Bereken nu ook de bijdrage van het kwadrupoolmoment, en gebruik eventueel de symmetrie van het probleem om snel in te zien welke component(en) van het kwadrupoolmoment verschillend zijn van 0. [/ 1]

4. Toon aan dat de meest dominante bijdrage tot de energiedichtheid op grote afstand gegeven is door

$$W = \frac{\epsilon}{2} \frac{\sigma_0^2 \pi^2 R^6}{256 \epsilon^2} \frac{1}{r^6} \left(1 + \frac{3y^2}{r^2}\right)$$

   Hint: bolcoordinaten zijn het meest aangewezen om deze berekening te doen. [/ 1,5]

5. In je oplossing voor de elektrostatische potentiaal is er een vlak waar alle drie de eerste momenta verdwijnen. Identificeer dit vlak. Kan je op basis van symmetry argumenteren dat dit een algemene eigenschap is van de volledige potentiaal, en niet enkel van de eerste momenta. Wat besluit je hieruit voor het elektrisch veld op dit vlak? [/ 1]

Enkele nuttige formules:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin(n\phi)\sin(m\phi) = \pi\delta_{nm} = \int_0^{2\pi} d\phi \cos(n\phi)\cos(m\phi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin(n\phi)\cos(m\phi) = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta)^2 \cos(\theta) = \frac{1}{3}$$