Examen Wiskundige methode in de Fysica

24 januari 2019

1. De functie $u(\overleftrightarrow{x}, t)$ voldoet aan de diffusievergelijking met Neumann randvoorwaarden in een gebied $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Bewijs dat de volgende ongelijkheid geldt:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dV \leq 0$$

   Hieruit volgt dat er geen niet-triviale periodieke oplossingen van de diffusievergelijking zijn. Leg uit waarom dit zo is.

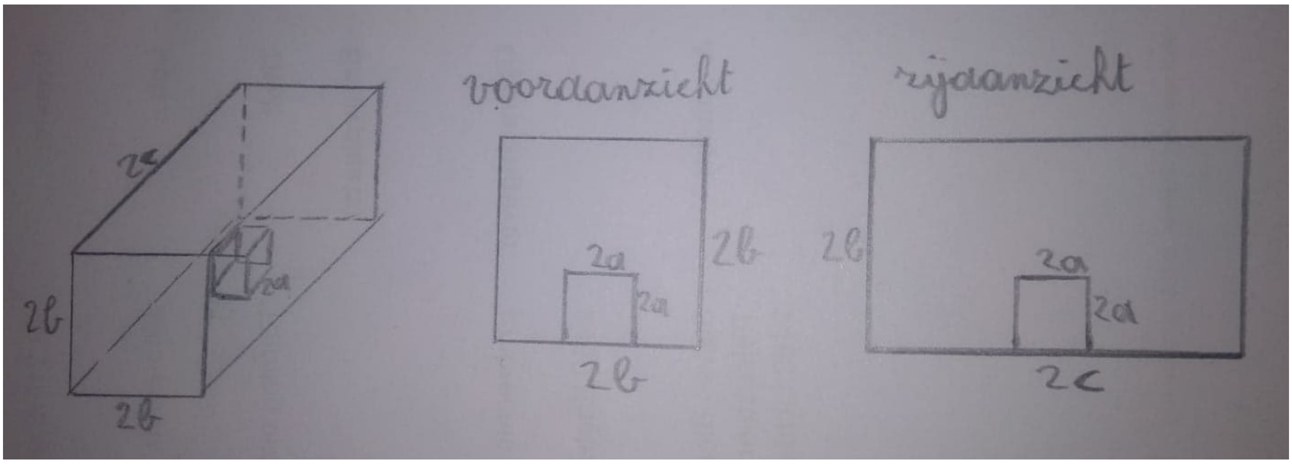
2. Toon aan via contourintegratie:

$$\int_0^\pi \frac{a}{a^2 + \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

3. Los het volgende stelsel op aan de hand van Laplacetransformaties, met als beginvoorwaarden $X(0) = x_0$ en $Y(0) = 0$.

$$\frac{dX}{dt} = g_1 X + g_2 Y$$
$$\frac{dY}{dt} = -g_2 X + g_1 Y$$

4. Een cake is geïsoleerd in een balkvormige box (en vult de hele box) met afmetingen 2b, 2b en 2c zoals te zien is in figuur 1 (sorry voor de kwaliteit van de tekening). In de cake is een kubusvormig stuk chocolade verstopt met ribbe 2a. De cake vertrekt van een uniforme temperatuur van 25°C en het stukje chocolade vertrekt van een uniforme temperatuur van −5°C. Bereken (de eigenmodes van) de temperatuursverdeling van de cake. Hierbij mag je ervan uitgaan dat de diffusieconstante voor de cake en de chocolade gelijk zijn.



Figuur 1: Verduidelijking van de positie van de chocolade in de cake