Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$$

Academiejaar 2018-2019

2de zittijd, 19 augustus 2019: 09u00 - 12u00

Vraag 1: Behoudswetten

Beschouw de wetten van Maxwell in een isotroop medium ($\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$).

1. Leid uit de wetten van Maxwell de behoudswet van lading af. Bespreek in het bijzonder wat dit impliceert voor de ladingsdichtheid ρ in de bulk van het medium, indien dit een goede isotrope geleider is ($\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$) met grote geleidbaarheid σ. (/ 1)

2. Uit de wet van Newton volgt dat de tijdsafgeleide van de impulsdichtheid van het medium gegeven wordt door de Lorentz krachtdichtheid $\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}$, en de tijdsafgeleide van de energiedichtheid van het medium door de hierbij geleverde vermogensdichtheid $\mathcal{P}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$. Indien we verder de energiedichtheid van het elektromagnetische veld invoeren als $W=\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$ en de energiestroomdichtheid per eenheid van oppervlakte als $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ (vector van Poynting), toon dan een behoudswet voor energie aan, zowel in differentiaalvorm als in integraalvorm. Bespreek in het bijzonder de fysische betekenis van de integraalvorm. (/ 2)

3. Analoog definiëren we ook de impulsdichtheid van het elektromagnetische veld als

   $$\mathbf{g}=\mathbf{D}\times\mathbf{B}=\epsilon\mu\mathbf{S},$$

   en de spanningstensor van Maxwell als

   $$\mathsf{T}=\mathbf{B}\otimes\mathbf{H}+\mathbf{D}\otimes\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\mathsf{1}.$$

   Gebruik deze elementen en de Lorentz krachtdichteid om een behoudswet voor impulsdichtheid op te stellen, zowel in differentiaalvorm als in integraalvorm. Hoe zou je het element T^{ij} en fysisch interpreteren en wat is de specifieke rol van i, en wat die van j? (/ 2)

Vraag 2: Cherenkov straling

Beschouw een bewegende puntlading q op een pad $\mathbf{r}_0(t)$, opnieuw in een isotroop achtergrondmedium ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\epsilon\mu = 1/c^2$).

1. Wat is de ladingsdichteid $\rho(\mathbf{r}, t)$ en stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ geassocieerd aan deze bewegende puntlading. (/0,5)

2. Gegeven de algemene uitdrukking voor de vectorpotentiaal als functie van de stroomdichtheid
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$$
alsook de definitie van de Fouriertransformatie in de tijd
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$
Bereken de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ (in frequentie-domein) voor de stroomdichtheid gegenereerd door de bewegende puntlading, in de benadering dat de puntlading zich dicht tegen de oorsprong bevindt en de waarnemer veraf staat: $|\mathbf{r}_0(t)| \ll |\mathbf{r}|$. Toon in het bijzonder aan dat je de afhankelijkheid van de baan van het deeltje in deze uitdrukking volledig kan vatten in de functie
$$\boldsymbol{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_0(t)/c)}\,\mathrm{d}t$$
met hierin $\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}(t)$. (/ 1)

3. Bereken nu ook $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mu^{-1}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ en $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ in dezelfde benadering van een waarnemer veraf. (/ 1,5)

4. Bereken tot slot de uitgestraalde energie per eenheid van ruimtehoek en per eenheid van frequentie, gegeven als
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = r^2(\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)^* + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)) \cdot \mathbf{e}_r$$
nog steeds geformuleerd voor een algemene $\boldsymbol{\alpha}$ (/ 0,5).

5. Bespreek aan de hand van deze formules het effect van Cherenkovstraling, waarbij een deeltje een eenparig rechtlijnige beweging $\mathbf{r}_0(t) = ut\mathbf{e}_z$ uitvoert, waarbij $\beta = u/c$ groter kan zijn dan de effectieve lichtsnelheid c in het achtergrondmedium. Bespreek de frequentieafhankelijkheid en illustreer aan de hand van een figuur de richtingsafhankelijkheid van de straling. (/ 1,5)

Examen Elektromagnetisme: Oefeningen

Academiejaar 2018-2019

2de zittijd, 19 augustus 2019: 13u30 - 16u30

1. Drama bij de Tokamak

Bij het ITER experiment is gisteren een grote doorbraak gebeurd. Men is er namelijk voor de eerste keer in geslaagd om het 'break even point' te bereiken. Het feestje achteraf is echter minder goed uitgedraaid. Twee wetenschappers zijn in de reactor terechtgekomen en de hele opstelling is om zeep. Er staan wel nog ergens vaag op een bord enkele uitdrukkingen voor de potentiaal opgeschreven. Aan jou om hieruit de volledige ladings- en stroomverdeling te berekenen en het experiment te redden.
We werken in cilindercoördinaten. Voor het gebied waar $R \leq r$ gelden de volgende potentialen:

$$V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}[\ln(r) + (r-R)\cos((r-R)t)] \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 K}{2r}[R^2 + (r-R)^2]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\rho R^2 t}{2\epsilon_0}\cos((r-R)t)\hat{\mathbf{r}} + \mu_0 K(r-R)\phi\hat{\mathbf{r}} \tag{2}$$

Voor $r \leq R$ geldt er:

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0}[r^2 + (R-r)\cos((R-r)t)] \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 K}{2r}[r^2 + (R-r)^2]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\rho t}{2\epsilon_0}\cos((R-r)t)\hat{\mathbf{r}} + \mu_0 K(r-R)\phi\hat{\mathbf{r}} \tag{4}$$

1. Bepaal aan de hand van de potentialen de velden **E** en **B** voor beide gebieden.

2. Bepaal nu ook de ladingsdichtheid ρ en de stroomdichtheid **J** in deze gebieden.

3. Bespreek de tijdsafhankelijkheid van ρ en **J**. Komt dit overeen met de verwachting?

2. Nieuwe wet van Coulomb

Stel dat uit nieuwe, zeer precieze experimenten zou blijken dat de wet van Coulomb een correctie nodig heeft van de vorm

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1 + \frac{r}{\lambda})e^{-r/\lambda}\hat{\mathbf{r}}$$

waarbij λ een nieuwe natuurconstante is die als zeer groot beschouwd mag worden. Bereken nu de aanpassingen die hiervoor zouden moeten gebeuren in de elektrostatica.

1. Bepaal het elektrisch veld **E** van een willekeurige ladingsverdeling op een manier die analoog is aan de huidige elektrostatica.

2. Kan er hier een scalaire potentiaal gedefinieerd worden (d.w.z. een functie V waarvoor $\mathbf{E} = - \boldsymbol{\nabla} V$)?

3. Bereken de potentiaal V voor een puntlading in de oorsprong. Je mag er vanuit gaan dat de potentiaal verdwijnt op ∞.

4. Toon aan dat voor een puntlading in de oorsprong de volgende gelijkheid geldt.
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} + \frac{1}{\lambda^2} \int_V V d^3x = \frac{q}{\epsilon_0}$$
Hierbij is S het boloppervlak van een willekeurig sferisch volume V met de puntlading q in het middelpunt.

5. We willen nu ook bewijzen dat dit algemeen geldt, dus dat
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} + \frac{1}{\lambda^2} \int_V V d^3x = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d^3x$$
Deze uitdrukking heeft ook een differentiaalvorm, die een aangepaste wet van Gauss geeft. Na invullen van de potentiaal geeft deze ook een aangepaste vergelijking van Poisson. Geef deze 2 differentiaalvergelijkingen.

6. Controleer nu expliciet dat de differentiaalvergelijking voldaan is voor een puntlading in de oorsprong. Gebruik hierbij waar mogelijk de gelijkheid $\nabla^2 r^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$.

n.v.d.r.
Bij oefening 1 stond de laatste term van de vectorpotentiaal, dus $\mu_0 K(r - R)\phi\hat{\mathbf{r}}$, oorspronkelijk niet in de opgave. Deze is tijdens het examen toegevoegd en de studenten kregen de keuze om het met of zonder deze term op te lossen. Beide zijn mogelijk, maar geven wel een verschillende oplossing. Volgens de prof zou de oplossing met de term erbij 'mooier' zijn.
Oefening 2 komt bijna volledig uit 'Introduction to Electrodynamics' van Griffiths (te vinden bij de links op Minerva), het is 1 van de laatste oefeningen van hoofdstuk 2 (2.49 in de 3e editie). Als ook de oplossingen nog bij deze links staan kan je daar eens gaan kijken als je vast zit.