# Examen Elektromagnetisme: Theorie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Academiejaar 2019-2020

1ste zittijd, 1 juli 2020: 08u30 - 11u30

## Vraag 1: Magnetische multipoolontwikkeling ( / 6)

Beschouw een gelokaliseerde stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ met eventueel bijbehorende ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r}, t)$ in een isotroop medium. De vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ wordt uit de algemene theorie van Greense functies gegeven door

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \int \mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta\left(t - t' - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right). \tag{1}$$

Gegeven dat de stroom $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ enkel verschillend is van nul op posities $\mathbf{r}'$ veel dichter bij de oorsprong dan de positie van de waarnemer $\mathbf{r}$ (dat is enkel voor $r' = |\mathbf{r}'| \ll r = |\mathbf{r}|$), dan kan je een multipoolontwikkeling opstellen door gebruik te maken van de voortbrengende functie van de Legendre veeltermen

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) = 1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \mathcal{O}\left((r'/r)^2\right). \tag{2}$$

1. Kan je, voor een isotroop medium, een eenvoudige relatie (behoudswet) afleiden tussen de stroomdichtheid en de ladingsdichtheid uit de wetten van Maxwell. Het is niet nodig om verder in te gaan over wat deze behoudswet impliceert voor een geleider. ( / 0,5)
2. Beschouw voor vraag 2 tot 6 dat de stroomdichtheid tijdsonafhankelijk is, en er dus geen bijbehorende ladingsdichtheid is. Kan je uitdrukking voor $\mathbf{A}$ in dit geval vereenvoudigen? ( / 0,5)
3. Toon voor de tijdsonafhankelijke bron aan dat de monopoolterm $\mathbf{A}_0$, die je krijgt voor $l = 0$ als je de expansie voor de factor $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ invult, wegvalt. ( / 0,5)
4. Werk de dipoolterm $\mathbf{A}_1$ uit en schrijf deze in termen van het magnetische dipoolmoment $\mathbf{m}$ van de stroomverdeling, waarvoor je de definitie zelf moet invoeren ( / 1,5).
5. Bereken het magnetische dipoolmoment voor een vlakke stroomkring met stroomsterkte $I$ die loopt omheen een vlak gebied met oppervlakte $S$ en eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ ( / 1).
6. Bereken voor de dipoolbenadering $\mathbf{A}_1$ ook de bijbehorende magnetische inductie $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$ en toon aan dat je die kan schrijven als een gradient $\mathbf{B}_1 = -\nabla V_m$ van een scalaire magnetische potentiaal $V_m$. ( / 1).
7. Beschouw nu, voor de tijdsafhankelijke stroomdichtheid, opnieuw de monopoolterm. Neem aan dat de regio rond de oorsprong waar de stroomdichtheid verschillend is van nul op alle tijdstippen voldoende klein is, en benader in de Dirac-$\delta$-functie eveneens $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \to \|\mathbf{r}\|$.

Is de monopoolterm nog steeds nul? Indien niet, kan je hem schrijven in termen van een andere grootheid die de bron (in het bijzonder de ladingsdichtheid) karakteriseert, met behulp van de behoudswet uit vraag 1? ( / 1)

XTRA: Toon aan dat de definitie van het magnetisch dipoolmoment in het tijdsonafhankelijk geval onafhankelijk is van de keuze van de oorsprong. Wat verwacht je voor de transformatieformule in het tijdsafhankelijke geval? ( / +1)

## Vraag 2: Cherenkov straling ( / 6)

Beschouw een bewegende puntlading $q$ op een pad $\mathbf{r}_0(t)$, opnieuw in een isotroop achtergrondmedium ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\epsilon\mu = 1/c^2$).

1. Wat is de ladingsdichteid $\rho(\mathbf{r}, t)$ en stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ geassocieerd aan deze bewegende puntlading. ( / 0,5)

2. Gegeven de algemene uitdrukking voor de vectorpotentiaal als functie van de stroomdichtheid
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \int \mathrm{d}t' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}\delta\left(t - t' - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right)$$
alsook de definitie van de Fouriertransformatie in de tijd
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$
Bereken de vectorpotentiaal $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ (in frequentie-domein) voor de stroomdichtheid gegenereerd door de bewegende puntlading, in de benadering dat de puntlading zich dicht tegen de oorsprong bevindt en de waarnemer veraf staat: $|\mathbf{r}_0(t)| \ll |\mathbf{r}|$. Toon in het bijzonder aan dat je de afhankelijkheid van de baan van het deeltje in deze uitdrukking volledig kan vatten in de functie
$$\boldsymbol{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t - \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{r}_0(t)/c)}\,\mathrm{d}t$$
met hierin $\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}(t)$. ( / 1)

3. Bereken nu ook $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ en $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ in dezelfde benadering van een waarnemer veraf. ( / 1)

4. Bereken tot slot de uitgestraalde energie per eenheid van ruimtehoek en per eenheid van frequentie, gegeven als
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = r^2(\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)^* + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)) \cdot \mathbf{e}_r$$
nog steeds geformuleerd voor een algemene $\boldsymbol{\alpha}$ ( / 0,5).

5. Bespreek aan de hand van deze formules het effect van Cherenkovstraling, waarbij een deeltje een eenparig rechtlijnige beweging $\mathbf{r}_0(t) = ut\mathbf{e}_z$ uitvoert, waarbij $\beta = u/c$ groter kan zijn dan de effectieve lichtsnelheid $c$ in het achtergrondmedium. Bespreek de frequentieafhankelijkheid van de uitgestraalde energie en leg uit hoe je hierin een uitgestraalde hoeveelheid energie per eenheid van frequentie en per eenheid van tijd kan herkennen. Illustreer en verklaar aan de hand van een figuur de richtingsafhankelijkheid van de straling. ( / 2,5)

6. Wat loopt er fout wanneer je het Cherenkov-effect tracht te verklaren met behulp van de puntpotentialen van Liénard-Wiechert? ( / 0,5)