1ste Ba Fysica & Sterrenkunde – 01.06.2021
Vectoranalyse (recto verso)

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de geruite bladen. Neem telkens een nieuw blad* (niet enkel een nieuwe bladzijde) *per vraag. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad. Alles moet ingediend worden: het blad met de opgave, de antwoorden en de kladbladen.* ***Alleen de geruite bladen zullen verbeterd worden.***
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus "analoog" of "wegens de stelling van X", dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

NIEUW GERUIT BLAD

Vraag I.

1. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg):
   (a) Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ afbeelding. Als f afleidbaar is in $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, dan bestaan $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, en zijn deze partiële afgeleiden continu. NEE
   (b) Als $\mathbf{F}$ een vectorveld is in $\mathbb{R}^3$ van de klasse C^2, dan is $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$. JA
2. Definieer wanneer een functie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een *lokaal C^k-diffeomorfisme* is in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. (cursus p. 40).
3. Beantwoord de volgende vragen:

   Stelling. *Zij $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een functie van klasse C^k ($k \geq 1$) in een omgeving van $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Als $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{a})) \neq 0$, dan is $\mathbf{f}$ een lokaal C^k-diffeomorfisme in $\mathbf{a}$.*

   Bewijs. Beschouw de functie

   $$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}.$$

   Dan bestaan $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ zo dat voor elke $\mathbf{x} \in U := B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \delta)$ een unieke $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ bestaat zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ en is $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ een C^k-afbeelding $U \to \mathbb{R}^n$ **[1]**. Dit toont aan dat $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ de inverse afbeelding is van de bijectie $\mathbf{f} : \mathbf{y}(U) \to U$. We gaan na dat $\mathbf{y}(U)$ een omgeving is van $\mathbf{a}$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is, vinden we een $r \in]0, \varepsilon[$ met de eigenschap dat $\mathbf{f}(\xi) \in U$ voor elke $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$. Dan is $B(\mathbf{a}, r) \subseteq \mathbf{y}(U)$, want als $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$ dan is $\xi = \mathbf{y}(\mathbf{f}(\xi)) \in \mathbf{y}(U)$ **[2]**. □

   Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

   [1] Verklaar het bestaan van deze δ en ε.
   Deze bestaan door de stelling van de impliciete functies. Het nagaan van de voorwaarden om deze toe te passen, gebeurt zoals in de cursus op p. 40.

   [2] Verklaar de gelijkheid.
   Als $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$, dan is ξ het unieke element $\mathbf{z} \in B(a, \varepsilon)$ waarvoor $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\xi) \in U$, wat bij definitie van $\mathbf{y}$ ook gelijk is aan $\mathbf{y}(\mathbf{f}(\xi))$.

NIEUW GERUIT BLAD

Vraag II.

1. Formuleer de stelling van Stokes (geen bewijs). (cursus p. 85)

2. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg):

   Als een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie f van klasse C^2 is in een omgeving van een kritiek punt (a, b), en de Hessiaanse determinant van f is strikt positief (resp. strikt negatief), dan bereikt f een lokaal minimum (resp. maximum). NEE

3. Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ afbeelding van klasse C^1 en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Toon aan of weerleg: $\nabla f(a, b)$ staat loodrecht op het oppervlak met vergelijking $z = f(x, y)$ in het punt $(a, b, f(a, b))$.
   Vatten we $\nabla f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$ op als een vector in het xy-vlak (anders is de eigenschap trivialerwijs nooit vervuld), dan zien we dat dit niet kan kloppen, omdat de grafiek van een gladde functie van twee veranderlijken bijna nergens loodrecht staat op een vector in het xy-vlak. Als $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, dan zou dat immers betekenen dat het raakvlak aan de grafiek evenwijdig is met de z-as, wat niet kan (intuïtief zou dit betekenen dat een van de richtingsafgeleiden oneindig groot wordt—het raakvlak is immers opgespannen door $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ en $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$). (Je kan ook expliciet de normaal berekenen en zien dat die doorgaans niet parallel is met $\nabla f(a, b)$.)

4. Formuleer en bewijs hoe de lijnintegraal van een vectorveld verandert onder de overgang op een andere parametervoorstelling. Behandel zowel gelijk georiënteerde als niet gelijk georiënteerde parametervoorstellingen. (cursus p. 50)

5. Beantwoord de vragen:

   Stelling. *Is f begrensd over $R =]a,b[\times]c,d[$, dan is* $\overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} f(x,y)\, dy \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\, dxdy.$

   Bewijs. Definieer
   $$g(x) := \overline{\int_c^d} f(x,y)\, dy, \quad \forall x \in [a,b].$$
   Zij $\Delta := \{R_{ij} \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ een willekeurige partitie van R. Er volgt dat
   $$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} g(x)\, dx &\overset{[1]}{\leq} \sum_i (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1}<x<x_i} g(x) \leq \sum_i (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1}<x<x_i} \left(\sum_j \sup_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y)(y_j - y_{j-1}) \right) \\ &\overset{[2]}{\leq} \sum_i (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1}<x<x_i} \left(\sum_j M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \right) \\ &= \sum_i (x_i - x_{i-1}) \sum_j M_{ij}(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j} M_{ij} O_{ij} = S_\Delta.\end{aligned}$$
   Omdat de partitie Δ willekeurig was, verkrijgen we
   $$\overline{\int_a^b} g(x)\, dx \overset{[3]}{\leq} \overline{\iint_R} f(x,y)\, dxdy.$$
   $\square$

   Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

   [1–3] Verklaar de ongelijkheid.

[1] in het rechterlid staat een bovensom van g, nl. voor de partitie $\{a = x_0, \ldots, x_p = b\}$ van $]a, b[$. Elke bovensom is tenminste zo groot als de bovenintegraal, want die is bij definitie het infimum van alle bovensommen.

[2] bij definitie is $f(x,y) \leq M_{ij} = \sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)$ voor elke $x \in]x_{i-1}, x_i[$ en $y \in]y_{j-1}, y_j[$. Voor een vaste $x \in]x_{i-1}, x_i[$ is dan ook $\sup_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y) \leq M_{ij}$.

[3] Als $\overline{\int_a^b} g(x)\, dx \leq S_\Delta$ voor elke partitie Δ, dan is ook $\overline{\int_a^b} g(x)\, dx \leq \inf_\Delta S_\Delta = \overline{\iint_R} f(x,y)\, dxdy$.

6. Verkrijg je met de volgende redenering de correcte waarde voor $\frac{\partial g}{\partial x}$? Leg uit waarom (niet).

   Zij $f(u,v) = uv^3$, $u(x,y) = y^2 \sin x$, $v(x,y) = x^2 \cos y$. Noem $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Dan is

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = v^3 y^2 \cos x = x^6 y^2 \cos x \cos^3 y.$$

   Nee, volgens de kettingregel in meerdere veranderlijken verkrijgen we (in dezelfde beknopte notatie als hierboven)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{\neq 0}.$$

   (Dat de gelijkheid niet klopt, volgt trouwens ook door de samengestelde functie g uit te rekenen als functie van x en y, en hiervan de partiële afgeleide naar x te nemen.)

Tijd tot 16u00.