

Theorie-examen Kosmologie, 14 januari 2022

• **Vraag 1 : schriftelijk**

Leid de wet van Hubble-Lemaître af als de eerste-ordebenadering van de relatie tussen roodverschuiving z en lichtreisafstand d . Welke parameters komen in deze vergelijking voor en wat betekenen ze fysisch?

• **Vraag 2 : schriftelijk**

Wat betekent het precies als deeltjes ontkoppelen uit evenwicht? Onder welke omstandigheden of voorwaarden doet dit zich voor?

Bespreek grondig hoe elektron-positronannihilatie verloopt. Hoe beïnvloedt ontkoppeling-uit-evenwicht de uiteindelijke verhouding van de elektrondichtheid tot de fotonendichtheid? Hoe beïnvloedt het de uiteindelijke temperatuur van de fotonen en van de elektronneutrino's en -antineutrino's?

• **Vraag 3 : schriftelijk**

De algemeen-relativistische Klein-Gordonvergelijking

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{1}$$

beschrijft de dynamica van een scalair veld ϕ met energiedichtheid en druk

$$\rho c^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{2}$$

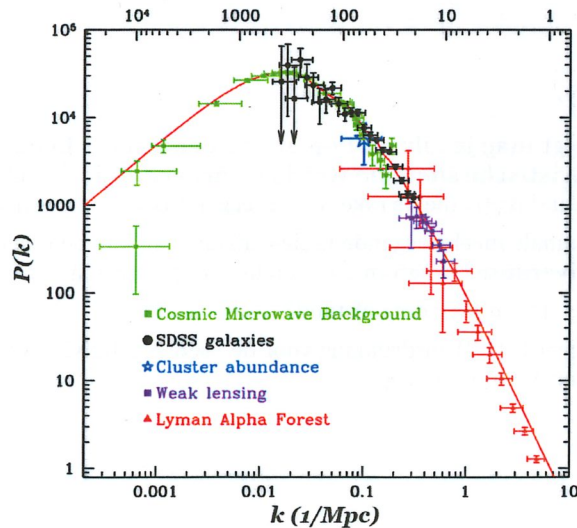
$$p = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{3}$$

in een gekromde ruimtetijd.

– Specialiseer de KG-vergelijking voor een vlak FLRW universum.

– Wat zijn de slow-rollvoorwaarden? Wat drukken ze fysisch uit? Hoe verwoord je ze wiskundig? Tot wat voor expansie leidt dit als het veld zich zeer hoog in de potentiaal $V(\phi)$ bevindt?

• **Vraag 4 : schriftelijk voorbereiden, mondeling**



Bespreek deze figuur. Geef bondig weer wat hier staat afgebeeld en welke fysische processen hier aan het werk zijn. Orden je gedachten op papier met behulp van enkele slagzinnen en trefwoorden met hoogstens enkele zeer korte berekeningen of formules als je dat nodig vindt.

Ter herinnering:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + r(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4)$$

$$\frac{3}{R^2} \left(k + \frac{\dot{R}^2}{c^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (5)$$

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{3\ddot{R}}{c^2 R} + \frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) = 0. \quad (7)$$

• Oefening 5 : schriftelijk

Een ruimtereiziger verlaat de planeet Zworg (een fictieve planeet ergens in onze Melkweg) op tijdstip t_0 voor een raketreis doorheen het heelal (algemeen beschreven met een FLRW model). Na een korte lancering is alle brandstof opgebruikt en valt de raketmotor voorgoed uit. De raket verlaat de Melkweg met een snelheid v zoals gemeten door de achterblijvende waarnemers in de Melkweg. Dit betekent dat op t_0 de raket een **fysische afstand** $d\ell$ aflegt in een coördinatentijdsspanne dt waarbij $d\ell = v dt$. De raket beweegt daarna vrij verder op een radiële baan t.o.v. de Melkweg

De coördinatentijd van de meebewegende waarnemers in de Melkweg is t en de meebewegende radiële afstand is χ . De eigentijd van de ruimtereiziger is τ . Afgeleiden naar t worden als “ \cdot ” genoteerd terwijl afgeleiden naar de eigentijd van de ruimtereiziger als “ $'$ ” worden genoteerd.

1. Gebruik de FLRW metriek om aan te tonen dat op t_0 geldt dat

$$\begin{aligned} t'_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ R_0 \chi'_0 &= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ R_0 \dot{\chi}_0 &= v. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Toon aan dat de baan van de raket beschreven wordt door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} (t')^2 &= 1 + \frac{R^2}{c^2} (\chi')^2 \\ (R^2 \chi')' &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

3. **In wat volgt mag je alles tot op eerste orde in v/c benaderen gezien de raket niet met een relativistische snelheid werd gelanceerd.** Leid een uitdrukking af voor de meebewegende radiële afstand $\Delta\chi(t)$ die de raket kan afleggen tussen t_0 en een later tijdstip t .
4. Welke maximale meebewegende radiële afstand $\Delta\chi$ kan de raket ooit bereiken in een **Einstein-de Sitter-universum**? Waarom is er een limiet op deze afstand?
5. Hoe lang doet licht over deze afstand?
6. Geef een (zeer korte!) uitdrukking voor de roodverschuiving van de verste galaxie die kan bezocht worden door de ruimtereiziger.