Examen Projectieve Meetkunde, 25 augustus 2023

Deel I: Algemene projectieve meetkunde

Vraag 1. Onderstel dat V en W twee vectorruimten zijn van dimensie $n \geq 3$ over de respectievelijke velden $\mathbb{F}$ en $\mathbb{F}'$. Onderstel eveneens dat α een bijectie is tussen de puntenverzameling van $\mathrm{PG}(V)$ en de puntenverzameling van $\mathrm{PG}(W)$. Toon aan dat α uitgebreid kan worden tot een collineatie van $\mathrm{PG}(V)$ op $\mathrm{PG}(W)$ als en slechts als α elke drie collineaire punten van $\mathrm{PG}(V)$ afbeeldt op drie collineaire punten van $\mathrm{PG}(W)$.

Vraag 2. Onderstel dat $\mathbb{F}$ een veld is van karakteristiek 2, en dat $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ elementen zijn van $\mathbb{F}$. Geef (met bewijs) een nodige en voldoende voorwaarde waaraan de veldelementen $a_{00}, \ldots, a_{22}$ moeten voldoen opdat het kwadratisch polynoom $F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} X_i X_j$ absoluut reduciebel zou zijn.

Vraag 3. Onderstel dat V een 4-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ en dat κ de Klein correspondentie is tussen de verzameling rechten van $\mathrm{PG}(V)$ en de punten van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$. Wat verstaat men onder een stralenveld en stralenschoof? Als $\mathcal{L}_\pi$ de verzameling rechten voorstelt in een vlak π van $\mathrm{PG}(V)$, toon dan aan dat $\kappa(\mathcal{L}_\pi)$ een vlak van de Klein kwadriek is.

Deel II: Projectieve vlakken

Vraag 4.

(a) Definieer het begrip *affien vlak*.

(b) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R. Indien (R, T) de corresponderende ternaire ring is, bewijs dan de volgende eigenschap:

- voor alle $a, b, c, d \in R$ met $a \neq c$ bestaat er juist één koppel $(x, y) \in R^2$ waarvoor $T(a, x, y) = b$ en $T(c, x, y) = d$.

(c) Onderstel dat $\mathcal{P}$ een projectief translatievlak is met translatierechte U en translatiegroep T. Stel dat u een punt is niet incident met U, en dat $\{M_i \mid i \in I\}$ de verzameling van rechten is die incident zijn met u. Definieer $T_i := T_{M_i}$ voor elke $i \in I$, en stel $\ell := \{\gamma \mid \gamma \text{ is een endomorfisme van } T \text{ en } T_i^\gamma \leq T_i \text{ voor elke } i \in I\}$.

- Definieer een ringstructuur op ℓ.
- Bewijs nu dat ℓ een lichaam is.

Deel III: Oefeningen

Vraag 5.

(i) Beschouw een 3-dimensionale deelruimte μ van $\mathrm{PG}(6,q)$. Hoeveel vlakken van $\mathrm{PG}(6,q)$ snijden μ in juist een rechte?

(ii) Beschouw nu μ als een $\mathrm{PG}(3,q)$, ingebed in $\mathrm{PG}(6,q^3)$. Hoeveel vlakken van $\mathrm{PG}(6,q^3)$ snijden μ in juist een rechte (van μ)?

Vraag 6. Bekijk volgend lemma: Beschouw een projectieve ruimte $\mathrm{PG}(n,q)$ en een verzameling $S_1, S_2, ..., S_q$ van q deelruimten van dimensie a, met $0 \leq a \leq n-1$. Dan is er een $(n-a-1)$-dimensionale ruimte die disjunct is aan S_i, voor alle i. We kunnen $q+1$ deelruimten van dimensie a kiezen zodat er geen $(n-a-1)$-dimensionale ruimte bestaat die disjunct is aan deze $q+1$ deelruimten van dimensie a.
Bewijs dit lemma aan de hand van volgende stappen:

a.) Bewijs het lemma voor $a = n-1$.

b.) Bewijs het lemma voor $a = 0$, je mag hiervoor gebruik maken van het eerste deel van deze vraag en de polariteit ϕ bepaald door de eenheidsmatrix en de identieke afbeelding als involutie.

c.) Bewijs met inductie dat we voor een verzameling van q deelruimten van dimensie a een $(n-a-1)$-dimensionale ruimte disjunct aan deze q deelruimten kunnen vinden.

d.) Bewijs dat we $q+1$ deelruimten van dimensie a kunnen kiezen zodat er geen $(n-a-1)$-dimensionale ruimte bestaat die disjunct is aan deze $q+1$ deelruimten van dimensie a.