
AFLEIDINGEN

THEORETISCHE MECHANICA

2024-2025

door Robbe Haerens

Cursieve tekst en tussenliggende formules dienen als extra duiding.

Inhoudsopgave

1	Overzicht van de elementaire begrippen	3
1.1.1	Arbeid verricht door een kracht	3
1.1.2	Arbeid door een tijdsafhankelijke kracht	5
1.2.1	Zwaartepunt van meerdere deeltjes systeem	6
1.2.2	Draaimoment en krachtmoment meerdeeltjessysteem	7
1.2.3	Draaimoment t.o.v. het zwaartepunt	9
1.2.4	Arbeid als kinetische energie	10
1.2.5	Kinetische energie t.o.v. het zwaartepunt	11
1.2.6	Behoud van energie uit conservatieve interne en externe krachten	12
1.3.1	Veralgemeende coördinaten holonome bindingen	13
1.4.1	Eerste vorm van de Lagrangevergelijkingen	15
1.4.2	Tweede vorm van de Lagrangevergelijkingen	17
2	Variationele principes en de Lagrangevergelijkingen	18
2.2.1	Euler-Lagrange vergelijking	18
2.3.1	Euler-Lagrange vergelijking met configuraties	20
2.3.2	Lagrange bewegingsvergelijking	21
2.5.1	Invariantie van de Lagrangevergelijkingen	22
2.6.1	Canonisch toegevoegd moment	24
2.6.2	Totale impuls veralgemeende coördinaten	25
2.6.3	Totale draaimoment veralgemeende coördinaten	27
2.7.1	Hamiltoniaan behouden grootheid	29
2.7.2	Hamiltoniaan als energie	30
2.7.3	Hamiltoniaan Tijdsafhankelijkheid	31
3	Centrale kracht problemen	32

3.1.1	Lagrangevergelijkingen op 2 deeltjes	32
3.2.1	Draaimoment uit een centrale kracht	34
3.2.2	Centrale kracht zonder draaimoment	35
3.2.3	Perksnelheid uit conservatieve centrale kracht	36
3.2.4	Bewegingsvergelijking via behoud van draaimoment	38
3.2.5	Bewegingsvergelijking uit behoud van energie en draaimoment	39
3.3.1	Energie bij een radiale bewegingsvergelijking	40
3.5.1	Differentiaalvergelijking voor een orbitaal	42
3.7.1	Eccentriciteit en keerpunten van energie	44
3.7.2	Kegelsneden als orbitalen	47
3.7.3	Wetten van Kepler	48
3.9.1	De Laplace-Runge-Lenz vector	50
4	Kinematica van de beweging van een star lichaam	52
4.1.1	Arbitraire eenheidsvectoren	52
4.1.2	Orthogonale matrix $[O]$	53
4.4.1	Transformatie tussen assenkruisen	54
4.4.2	Eulerhoeken	55
4.6.1	Rotatie van een star lichaam	56
4.7.1	Eindige rotaties	58
4.8.1	Infinitesimale rotaties	59
4.10.1	Corioliseffect	60
5	De bewegingsvergelijkingen van starre lichamen	62
5.1.1	Draaimoment en traagheidstensor	62
5.3.1	Traagheidsmoment en kinetische energie	64
5.3.2	Massagewogen traagheidsmoment	65
5.4.1	Traagheidstensor rotaties	66
6	Oscillaties	68
6.1.1	Normaaltrillingsvergelijking	68
6.1.2	Normaaltrillingen oplossingen	70
8	Bewegingsvergelijkingen van Hamilton	72
8.1.1	Canonische vergelijkingen van Hamilton	72
8.1.2	Hamiltoniaan matrixnotatie	74

1 Overzicht van de elementaire begrippen

1.1.1 Arbeid verricht door een kracht

Toon aan dat de arbeid verricht door de kracht op een deeltje tussen twee punten van zijn baan gelijk is aan het verschil in kinetische energie tussen deze twee punten. Definiëer een conservatieve kracht, en leid de functionele vorm af waaraan een conservatieve kracht moet voldoen. Definieer de totale energie bij een conservatief systeem, en toon aan dat deze behouden is.

De arbeid verricht door een kracht $\vec{F}$ op een deeltje dat zich van punt 1 naar punt 2 beweegt over een pad $\vec{r}(t)$, wordt gedefinieerd als:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Hierbij is $d\vec{s}$ het infinitesimale lijnsegment tangentieel aan de baan.

Omdat:

$$d\vec{s} = d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt = \dot{\vec{r}}(t)dt$$

Deze substitutie geeft weer dat een infinitesimale verplaatsing gelijk is aan de snelheid op dat moment, vermenigvuldigd met de duur van die verplaatsing. Dit komt voort uit de definitie van snelheid als tijdsafgeleide van positie:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt$$

De vector $d\vec{s}$ is een differentieelement langs het pad en ligt dus tangentieel aan de baan. Aangezien snelheid ook tangentieel aan de baan ligt, zijn $d\vec{s}$ en $\vec{v}dt$ equivalent.

We herschrijven de arbeid als:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Volgens Newtons tweede wet geldt:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Daarmee wordt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

Nu gebruiken we de kettingregel voor scalaire functies:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Hieruit volgt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t_2) - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t_1) = T_2 - T_1$$

met $T(t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ de kinetische energie van een deeltje. Een kracht $\vec{F}$ is conservatief als de verrichte arbeid over een pad tussen 2 punten onafhankelijk is van de afgelegde weg, d.w.z. enkel afhangt van de begin- en eindpunten. De kringintegraal over een gesloten pad is dan nul:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Voor een conservatief systeem gelden de behoudswetten voor behoud van energie. Dit kan enkel als $F \cdot \dot{r}$ een tijdsafgeleide is van een functie $f(r(t))$ zodat voor elk pad:

$$\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} f(r(t))$$

Voor zo een kracht $\vec{F}$ is de voorwaarde dat:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

met V de potentiële energie, voldoende om te garanderen dat $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}f(\vec{r}(t))$, dus dat arbeid kan geschreven worden als de afgeleide van een functie en energiebehoud geldt. Dit vereist:

- enkel afhankelijkheid van positie $\vec{r}$
- geen afhankelijkheid van snelheid $\dot{\vec{r}}$
- geen expliciete afhankelijkheid van tijd t
- het krachtveld moet een gradiëntveld zijn

De eis dat $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ houdt in dat de kracht voortkomt uit een energetisch 'landschap'. Deeltjes bewegen vanzelf naar posities met lagere potentiële energie, zoals een bal spontaan naar het diepste punt van een helling rolt. Deze aanname is fysisch zinvol in systemen zonder dissipatie (zoals wrijving) en zonder externe tijdsafhankelijke invloeden.

Daarom is deze vorm $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ zowel wiskundig elegant als fysisch betekenisvol.

Gebruik nu de definitie van arbeid met $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \nabla V(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Via de kettingregel voor samengestelde functies geldt:

$$\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \nabla V(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Dus:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) dt = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V_1 - V_2$$

We combineren nu de uitdrukking voor arbeid via kinetische energie:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

met de arbeid via potentiële energie:

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

Daaruit volgt:

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E$$

De som van kinetische energie T en potentiële energie V is constant:

$$E = T + V = \text{constante}$$

In een systeem met alleen conservatieve krachten vindt geen energieverlies of -injectie plaats. De mechanische energie wordt enkel omgezet tussen bewegingsvorm (kinetisch) en configuratie (potentieel), maar het totaal blijft behouden.

1.1.2 Arbeid door een tijdsafhankelijke kracht

Wat als de kracht een gradiëntveld is, maar ook een expliciete tijdsafhankelijkheid vertoont?

We willen nagaan of de totale mechanische energie $E = T + V$ behouden blijft wanneer de kracht afkomstig is van een potentiaal $V(\vec{r}, t)$ die expliciet van de tijd afhangt. De kracht is dan:

$$\vec{F}(\vec{r}(t), t) = -\nabla V(\vec{r}(t), t)$$

We beschouwen een potentiaalfunctie $V(\vec{r}(t), t)$, waarbij $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. De kettingregel geeft dan:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t), t) = \frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r}(t), t) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\vec{r}(t), t) \frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial z}(\vec{r}(t), t) \frac{dz}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t)$$

Of nog:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t), t) = \nabla V(\vec{r}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t)$$

We vinden:

$$-\nabla V(\vec{r}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t)$$

Voor de infinitesimale arbeid geldt:

$$\vec{F}(\vec{r}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}} dt = \left(-\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t) \right) dt$$

We integreren de arbeid:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

De eerste term wordt:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{dt} dt = V(t_1) - V(t_2) = V_1 - V_2$$

Dus:

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{r}(t), t) dt$$

Uit de arbeid volgt ook een term voor de potentiaal die expliciete tijdsafhankelijkheid vertoont.

Via Newtons tweede wet:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{dT}{dt}$$

Gecombineerd met vorige stap:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t}$$

De tijdsafgeleide van de totale mechanische energie is:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \text{met} \quad E = T + V$$

Dus:

- Indien $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$: energie E is behouden.
- Indien $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$: energie E is niet behouden.

De potentiaal voert expliciet energie aan of onttrekt energie aan het systeem. De mechanische energie $E = T + V$ is dus geen constante in het geval van een tijdsafhankelijk krachtveld.

1.2.1 Zwaartepunt van meerdere deeltjes systeem

Definieer het zwaartepunt van een systeem van meerdere deeltjes. Toon aan dat het zwaartepunt beweegt als een deeltje met de totale massa van het systeem onder invloed van de totale externe kracht, mits de interne krachten voldoen aan (de zwakke vorm van) de 3e wet van Newton. Definieer de totale impuls van het systeem en toon aan dat deze behouden is als de externe kracht op het systeem verdwijnt.

Het zwaartepunt $\vec{R}$ van een systeem van deeltjes met posities $\vec{r}_i$ en massa's m_i wordt gedefinieerd als:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad \text{waar } M = \sum_i m_i$$

Volgens Newton's tweede wet geldt voor elk deeltje i :

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

waar:

- $\vec{F}_i^{(e)}$: externe kracht op deeltje i

- $\vec{F}_{ji}$: kracht van deeltje j op i (interne kracht)

Sommeer over alle deeltjes:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Volgens de zwakke vorm van Newton's derde wet geldt:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

Daarom geldt:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = 0$$

Hiermee blijft over:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

We gebruiken:

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(M\vec{R}) = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i$$

Dus:

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}^{(e)}$$

Het zwaartepunt beweegt alsof alle massa geconcentreerd zit in $\vec{R}$, onder invloed van enkel de som van de externe krachten.

De totale impuls is:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\dot{\vec{R}}$$

Afgeleide:

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}$$

Als $\vec{F}^{(e)} = 0$, dan is $\dot{\vec{P}} = 0$, en dus:

$$\vec{P} = \text{constant}$$

De totale impuls is behouden als er geen externe krachten zijn.

Deze term telt alle interne krachten op, namelijk de kracht van elk deeltje j op i , voor elk paar $i \neq j$. Door de derde wet van Newton komen alle krachten in tegengestelde paren voor, zoals:

$$\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = 0$$

Daarom verdwijnt de totale som van interne krachten, en beïnvloeden deze het gedrag van het zwaartepunt of de totale impuls niet. Dit is fundamenteel: interne krachten veranderen wel individuele bewegingen, maar niet de globale beweging van het systeem.

1.2.2 Draaimoment en krachtmoment meerdeeltjessysteem

Definieer het totaal draaimoment en extern krachtmoment (rond de oorsprong van een Cartesisch coördinaatsysteem). Toon aan dat in geval van centrale interne krachten (sterke vorm van 3e wet van Newton), de tijdsevolutie van het totaal draaimoment bepaald wordt door het extern krachtmoment, en dat het totaal draaimoment een behouden grootte is als het extern krachtmoment op het systeem verwijnt.

Voor een systeem van deeltjes met massa's m_i , posities $\vec{r}_i$ en impulsen $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$:

Totaal draaimoment (t.o.v. de oorsprong):

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Extern krachtmoment:

$$\vec{N}^{(e)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$$

Neem de tijdsafgeleide van $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

Gebruik de productregel:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \right)$$

Omdat $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$, geldt:

$$\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{0}$$

Dus:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Splits nu $\vec{F}_i$ op in externe en interne krachten:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Substitueer in de som:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

De eerste term is $\vec{N}^{(e)}$.

Gebruik de sterke vorm van de derde wet van Newton:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad \vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

De notatie $\vec{F}_{ji} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ betekent dat de kracht die deeltje j uitoefent op i volledig gericht is langs de verbindingslijn tussen i en j . Er is dus geen component loodrecht op $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, wat impliceert dat:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$

Combineer telkens de krachten in paren:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})$$

Omdat $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$

Dus de interne krachtmomentbijdrage is nul:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = 0$$

We houden over:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}$$

In het bijzonder:

$$\vec{N}^{(e)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante vector}$$

Het totale draaimoment is dan een behouden grootte.

1.2.3 Draaimoment t.o.v. het zwaartepunt

Toon aan dat het totaal draaimoment (rond de oorsprong) de som is van het draaimoment van het zwaartepunt plus het draaimoment van de beweging van de deeltjes t.o.v. het zwaartepunt.

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

waarbij $\vec{R}$ het zwaartepunt is, $\vec{P}$ de totale impuls, en $\vec{r}_i', \vec{p}_i'$ de relatieve positie en impuls van deeltjes t.o.v. het zwaartepunt.

Definieer het zwaartepunt van een systeem van deeltjes:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_i m_i$$

Definieer relatieve posities, die we zodanig kiezen dat:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

Differentieer naar de tijd:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i' \Rightarrow \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i = m_i \dot{\vec{R}} + m_i \dot{\vec{r}}_i' = m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p}_i'$$

Start met de definitie:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Substitueer:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i', \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p}_i'$$

Vul in voor het draaimoment:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times (m_i \dot{\vec{R}} + \vec{p}_i') \\ &= \sum_i \vec{R} \times m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{R} \times \vec{p}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' \end{aligned}$$

Beschouw elk van de vier termen afzonderlijk:

$$\sum_i \vec{R} \times m_i \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{P} \quad (1)$$

het draaimoment van het systeem als geheel.

$$\sum_i \vec{R} \times \vec{p}_i' = \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i' \quad (2)$$

Maar:

$$\sum_i \vec{p}_i' = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) = 0$$

dus deze term valt weg.

$$\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{R}} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \dot{\vec{R}} = 0 \times \dot{\vec{R}} = 0 \quad (3)$$

Deze term valt ook weg.

$$\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' \quad (4)$$

Deze blijft over als het interne draaimoment t.o.v. het zwaartepunt. Dit geeft ons voor het draaimoment:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

Het totaal draaimoment rond de oorsprong is dus de som van:

- het draaimoment van het systeem als geheel (de massa op $\vec{R}$)
- het interne draaimoment van de deeltjes rond het zwaartepunt

1.2.4 Arbeid als kinetische energie

Toon aan dat de arbeid verricht door de krachten op de deeltjes tussen twee punten van het configuratiepad gelijk is aan het verschil in totale kinetische energie tussen deze twee punten.

Onder invloed van een kracht $\vec{F}$ beweegt een deeltje langs een baan $\vec{r}(t)$, tussen tijdstippen t_1 en t_2 . De arbeid die de kracht $\vec{F}$ verricht is gegeven door:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

waarbij $d\vec{s} = \dot{\vec{r}} dt$.

Volgens de tweede wet van Newton:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Invullen in de arbeid:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

Gebruik de kettingregel in omgekeerde richting:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Substitueer in de integraal:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t_2) - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t_1) = T_2 - T_1$$

met:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

Voor een systeem van meerdere deeltjes i volgt uit sommatie:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i dt = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2(t_2) - \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2(t_1) \right] = T(t_2) - T(t_1)$$

met:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

de totale kinetische energie.

Dus:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

1.2.5 Kinetische energie t.o.v. het zwaartepunt

Toon aan dat de totale kinetische energie gelijk is aan de som van de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$$

waarbij:

- $M = \sum_i m_i$: totale massa van het systeem,
- $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$: positie van het zwaartepunt,
- $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$: decompositie van positievector t.o.v. het zwaartepunt,
- $\dot{\vec{r}}_i'$: relatieve snelheid t.o.v. het zwaartepunt.

De totale kinetische energie is:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Met $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$ volgt:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i'$$

Substitueer in de kinetische energie:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i')^2$$

Dan volgt:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}}^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_i'^2)$$

Splits dit op in drie termen:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}^2 \sum_i m_i + \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$$

De definitie van het zwaartepunt impliceert:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0$$

De tweede term valt weg:

$$\dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0$$

De totale kinetische energie is dan:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$$

met:

- $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$: de kinetische energie van het hele systeem alsof het zich als 1 massa beweegt op het zwaartepunt.
- $\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$: de kinetische energie van de deeltjes t.o.v. het zwaartepunt, dus de interne bewegingen.

Het resultaat laat toe de totale kinetische energie op te splitsen in een globale (translatie)component en een interne component, wat fundamenteel is voor bv. analyse van starre lichamen of systemen met inwendige dynamica.

1.2.6 Behoud van energie uit conservatieve interne en externe krachten

Definieer conservatieve externe en interne krachten (de interne krachten voldoen aan de zwakke vorm van de 3e wet van Newton). Toon aan dat in dit geval de totale energie een behouden grootheid is.

Externe krachten:

Voor een systeem van deeltjes geldt:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i)$$

waarbij $V_i(\vec{r}_i)$ de externe potentiaalfunctie is en $\vec{\nabla}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$.

Deze kracht hangt enkel af van de positie van deeltje i .

Interne krachten:

De kracht die deeltje j uitoefent op i :

$$\vec{F}_{ji} \equiv -\vec{\nabla}_i V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Symmetrievereiste door zwakke 3e wet van Newton:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$$

Dan geldt ook:

$$-\vec{\nabla}_j V = \vec{\nabla}_i V \Rightarrow -\vec{\nabla}_j V_{ji} = \vec{\nabla}_i V_{ji}$$

De potentiaal is vereist enkel een functie van de afstand te zijn.

De totale arbeid verricht door **externe en interne krachten**

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i) - \vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

op het systeem tussen t_1 en t_2 :

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} \cdot \dot{\vec{r}}_i dt + \sum_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_i dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{ij} \left(\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

Merk op dat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i V_i(\vec{r}_i) \right) &= \sum_i \left(\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) &= \sum_{ij} \left(\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

De totale potentiële energie is dan:

$$V_{tot} = - \sum_i V_i(\vec{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Invullen voor de arbeid geeft:

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_{tot}(t_1) - V_{tot}(t_2)$$

De totale energie:

$$E_{tot} = T + V_{tot}$$

is een behouden grootheid. Dit geldt zolang:

- $\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i)$,
- $\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$,
- de potentiaalfunctie V symmetrisch is: $V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$.

1.3.1 Veralgemeende coördinaten holonome bindingen

Toon aan dat in geval van holonome bindingen men altijd onafhankelijke veralgemeende coördinaten kan invoeren. Wat zijn bvb. de meest geschikte veralgemeende coördinaten voor een deeltje dat beweegt op een boloppervlak waarvan de straal expliciet van de tijd afhangt?

Dit betekent dat ondanks de aanwezigheid van beperkingen (de bindingen), het toch mogelijk is om een nieuwe set van coördinaten te vinden die onafhankelijk zijn en die het volledige systeem beschrijven.

Beschouw een mechanisch systeem bestaande uit N deeltjes. Elk deeltje beweegt in de driedimensionale ruimte, en wordt dus beschreven door drie cartesische coördinaten. Het totaal aantal coördinaten is:

$$3N \quad (\text{vrijheidsgraden zonder beperkingen})$$

Stel nu dat het systeem onderworpen is aan n_b holonome bindingen. Deze bindingen zijn vergelijkingen van de vorm:

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ \vdots \\ f_{n_b}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \end{cases}$$

Elke binding is een voorwaarde waaraan de posities van de deeltjes op elk tijdstip moeten voldoen. Dit zijn expliciete beperkingen op de toegelaten configuraties van het systeem in de vorm van differentieerbare vergelijkingen die de tijd expliciet mogen bevatten.

Wat is speciaal aan een holonome binding? Een holonome binding legt een beperking op die enkel afhankelijk is van de coördinaten van de deeltjes (en eventueel de tijd), en dus niet van hun snelheden.

Dit betekent dat de binding uitgedrukt kan worden als een gelijkheid tussen functies van de vorm:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_{n_q}, t) = 0$$

Daarmee onderscheiden holonome bindingen zich van niet-holonome bindingen, die beperkingen leggen op snelheden (zoals ongelijkheden of differentiaalvormen).

Elke holonome binding reduceert het aantal onafhankelijke coördinaten met één. Bijgevolg reduceert een systeem met n_b holonome bindingen het aantal vrijheidsgraden tot:

$$n_q = 3N - n_b \quad (\text{aantal veralgemeende coördinaten})$$

Er bestaat dan een set onafhankelijke veralgemeende coördinaten $q_1, q_2, \dots, q_{n_q}$ waarmee de oorspronkelijke cartesische coördinaten van de deeltjes volledig beschreven kunnen worden als:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_q}, t)$$

De functie $\vec{r}_i$ voldoet automatisch aan de bindingen, d.w.z. alle bindingen zijn reeds vervuld zodra de q_k evolueren volgens een toegelaten pad. De q_k zijn dus onafhankelijk van elkaar en beschrijven elk een vrijheidsgraad van het systeem.

Hiermee is bewezen dat men voor een systeem met holonome bindingen altijd onafhankelijke veralgemeende coördinaten kan invoeren.

Beschouw een enkel deeltje dat zich beweegt op het oppervlak van een bol waarvan de straal een gekende functie is van de tijd: $R(t)$.

De binding is:

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 = 0$$

Dit is een holonome binding, want het is een expliciete relatie tussen de coördinaten en de tijd.

Omdat er 3 oorspronkelijke vrijheidsgraden zijn (x, y, z) en 1 holonome binding, blijft er:

$$n_q = 3 - 1 = 2 \quad \text{vrijheidsgraden}$$

De geschikte veralgemeende coördinaten zijn dan de bolcoördinaten (θ, φ) , waarbij $r = R(t)$ vastligt:

$$x = R(t) \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = R(t) \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R(t) \cos \theta$$

Hieruit blijkt dat de cartesische coördinaten volledig bepaald worden door θ en φ , en dat deze dus de onafhankelijke veralgemeende coördinaten vormen van het systeem.

1.4.1 Eerste vorm van de Lagrangevergelijkingen

Neem aan dat voor een systeem met holonome tijdsonafhankelijke bindingen het principe van d'Alembert geldt, m.a.w. de arbeid verricht door de reactiekrachten verdwijnt. Ga over naar onafhankelijke veralgemeende coördinaten en leid hieruit de 1e vorm van de Lagrangevergelijkingen af.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

waarbij:

- T : de kinetische energie

- Q_k : de veralgemeende kracht gekoppeld aan q_k

Voor een systeem van N deeltjes met massa's m_i , is de kracht op elk deeltje $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)}$, met $\vec{F}_i^{(a)}$ de toegepaste (externe) kracht en $\vec{F}_i^{(r)}$ de reactiekracht (intern) van de bindingen.

De reactiekrachten verrichten geen arbeid volgens het principe van d'Alembert:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

Volgens de tweede wet van Newton:

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

Dotproduct met $\dot{\vec{r}}_i$ en sommatie over alle deeltjes geeft:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(r)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

De netto interne kracht tussen 2 deeltjes is 0, dan blijft over:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

We laten het superscript (a) voortaan weg:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0$$

De cartesische coördinaten $\vec{r}_i$ en snelheden $\dot{\vec{r}}_i$ zijn onderhevig aan de opgelegde bindingen, en zijn dus niet onafhankelijk. Om het systeem correct te beschrijven, gebruiken we veralgemeende coördinaten q_k .

Stel dat het systeem onderhevig is aan n_b holonome, tijdsonafhankelijke bindingen van de vorm:

$$f_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad \text{voor } n = 1, \dots, n_b$$

Dan blijft er een vrijheid over van $n_q = 3N - n_b$ onafhankelijke parameters. We kiezen de veralgemeende coördinaten q_k zodanig dat:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{n_q})$$

De beweging in cartesische coördinaten wordt dus volledig bepaald door de tijdsafhankelijke functies $q_k(t)$:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q_k(t))$$

Differentiatie met de kettingregel geeft het verband tussen cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

We substitueren dit in de d'Alembert-vergelijking:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

Gebruik lineariteit van het inwendig product:

$$\sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = 0$$

Aangezien de $\dot{q}_k$ onafhankelijk zijn:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad \text{voor alle } k$$

We definiëren de veralgemeende kracht als:

$$Q_k := \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Q_k is de projectie van de krachten op de richting waarin een virtuele verplaatsing δq_k arbeid zou leveren. Het is dus de effectieve krachtcomponent die gekoppeld is aan verplaatsingen langs de coördinaat q_k .

We zoeken nu een geschikte vorm voor de uitdrukking $\dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. Zonder massafactor wordt dit:

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

Aangezien:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

krijgen we:

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right)$$

Wanneer dan ook de massaterm in rekening wordt gebracht, vinden we de afhankelijkheid van de kinetische energie:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

De afgeleide hiervan is:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

Bovendien:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = Q_k$$

Vinden we de 1ste vorm van de Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Deze vergelijking is geldig voor systemen met holonome en tijdsafhankelijke bindingen. Ze laat toe om de bewegingsvergelijkingen op te stellen in termen van veralgemeende coördinaten.

1.4.2 Tweede vorm van de Lagrangevergelijkingen

Specialiseer naar een systeem met conservatieve (toegepaste) krachten en leid de 2e vorm van de Lagrange vergelijkingen af.

Bij conservatieve krachten weten we dat er een potentiaal V bestaat zodat:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$$

Hierbij is $\vec{F}_i$ de kracht op deeltje i , en $\vec{\nabla}_i$ de gradiëntoperator naar de coördinaten van dat deeltje. Dit betekent dat de kracht enkel afhangt van de positie van de deeltjes, en niet van hun snelheid of tijd.

Omdat de deeltjesposities $\vec{r}_i$ functie zijn van de veralgemeende coördinaten q_k , geldt:

$$V = V(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_n), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_n))$$

We gebruiken nu de kettingregel om de afgeleide van V naar een veralgemeende coördinaat q_k uit te drukken:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

De veralgemeende kracht Q_k is gedefinieerd als:

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Belangrijk: omdat V enkel van de posities afhangt, geldt ook:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

De Lagrangiaan is gedefinieerd als:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k)$$

Hieruit volgen de partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

De eerste vorm luidt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

We vervangen hierin $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

De rechterzijde naar de andere kant brengen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = 0$$

En dus:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

We bekomen de tweede vorm van de Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Deze vorm geldt wanneer de toegepaste krachten afgeleid zijn uit een potentiaal, en dus volledig in de Lagrangiaan $L = T - V$ zitten. Dit is een krachtige en compacte formulering van de bewegingsvergelijkingen voor conservatieve systemen met holonome tijdsonafhankelijke bindingen.

2 Variationale principes en de Lagrangevergelijkingen

2.2.1 Euler-Lagrange vergelijking

Leid de Euler-Lagrange vergelijking af voor het volgend probleem: voor welke functie $y(x)$ die door twee gegeven punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat (i.e. $y(x_1) = y_1$ en $y(x_2) = y_2$) is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), \dot{y}(x), x)$$

extremaal? Hier is f een gladde functie met 3 argumenten.

Om na te gaan of een functie $y(x)$ een extremum maakt van de functionaal $J[y]$, beschouwen we een kleine variatie van $y(x)$ via:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$$

waarbij α een reële parameter is die de grootte van de variatie bepaalt, en $\eta(x)$ een zogenaamde testfunctie is:

- $\eta(x)$ is willekeurig binnen het interval,
- maar moet voldoen aan de randvoorwaarden: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, zodat de variatie de eindpunten van het pad niet verplaatst.

Dit is essentieel, want we willen enkel die paden variëren die nog steeds door de gegeven eindpunten lopen.

De functionaal wordt een functie van α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx$$

We gebruiken de voorwaarde dat deze integraal stationair is in $y(x)$, zodat voor $\alpha = 0$:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Dit betekent dat een infinitesimale variatie van het pad $y(x)$ geen verandering veroorzaakt in de waarde van de actie — de actie is dus stationair.

Toepassen van de kettingregel op de afgeleide van $J(\alpha)$:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha} dx$$

We gebruiken nu de totale afgeleide van f :

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}$$

Vervang in de integraal:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx$$

We gebruiken:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x) \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \eta(x), \quad \frac{d\dot{y}}{d\alpha} = \dot{\eta}(x)$$

Evaluatie bij $\alpha = 0$:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \eta(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \dot{\eta}(x) \right] dx$$

de variatie van de actie bestaat uit een term met η (directe variatie van het pad) en een met $\dot{\eta}$ (variatie van de snelheid).

Om de term met $\dot{\eta}(x)$ te herschrijven gebruiken we integratie per partie. We stellen:

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$$

Dan geldt:

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) \dot{\eta}(x) dx = [h(x) \eta(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \dot{h}(x) dx$$

De grenswaarden verdwijnen wegens $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} h(x) \dot{\eta}(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \dot{h}(x) dx$$

dit herschrijft de bijdrage van variatie in snelheid naar een bijdrage van variatie in positie.

Substitueer terug:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \eta(x) dx$$

Als:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) \eta(x) dx = 0 \quad \text{voor alle } \eta(x) \text{ met } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

omdat de variatie $\eta(x)$ willekeurig is binnen die randvoorwaarden, dus als de integraal altijd nul moet zijn, dan moet de factor $g(x)$ zelf nul zijn,

dan volgt:

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Toegepast op ons resultaat:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

ofwel:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)$$

In de klassieke mechanica komt deze vergelijking voort uit het principe van kleinste actie:

- De Lagrangiaan is $L = T - V$ (kinetische min potentiële energie)
- $f = L(y, \dot{y}, x)$, en dan wordt de Euler-Lagrange vergelijking exact de bewegingsvergelijking.

Het pad $y(x)$ dat de actie stationair maakt, voldoet dus aan de dynamica van het systeem.

De functie $\eta(x)$ stelt een kleine vervorming voor van het pad $y(x)$ tussen vaste eindpunten. Ze test of het pad $y(x)$ een extremum is van de functionaal.

Stationariteit betekent dat eerste-orde wijzigingen in het pad geen invloed hebben op de waarde van de integraal J . Dit is analoog aan een afgeleide nul in gewone analyse:

$$F'(x) = 0 \Rightarrow x \text{ is een mogelijk extremum van } F$$

Hieruit volgt dat alleen die functies $y(x)$ die voldoen aan de Euler-Lagrange vergelijking in aanmerking komen als extremale oplossingen van het variatieprobleem.

2.3.1 Euler-Lagrange vergelijking in configuraties

Veralgemeen dit tot het probleem: voor welke functies $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ die door twee gegeven configuraties $(y_1(x_1), \dots, y_n(x_1))$ en $(y_1(x_2), \dots, y_n(x_2))$ gaan is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dots, \dot{y}_n(x), x)$$

extremaal? Leid de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen af.

We bekijken een familie van functies:

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

waarbij $\eta_i(x)$ arbitrair is behalve dat:

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$$

De actie wordt dan een functie van α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x, \alpha), \dots, y_n(x, \alpha), \dot{y}_1(x, \alpha), \dots, \dot{y}_n(x, \alpha), x) dx$$

We eisen stationariteit voor $\alpha = 0$:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Gebruik de kettingregel:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} \right) dx$$

We gebruiken:

$$\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = \eta_i(x), \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} = \dot{\eta}_i(x)$$

Daarmee:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i(x) \right) dx$$

We voeren een substitutie in:

$$h_i(x) := \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}(y_i(x), \dot{y}_i(x), x)$$

Dan wordt de tweede term:

$$\int_{x_1}^{x_2} h_i(x) \dot{\eta}_i(x) dx$$

We passen integratie per delen toe:

$$\int_{x_1}^{x_2} h_i(x) \dot{\eta}_i(x) dx = [h_i(x) \eta_i(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta_i(x) \frac{d}{dx} h_i(x) dx$$

Aangezien $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$, valt de eerste term weg:

$$\int_{x_1}^{x_2} h_i(x) \dot{\eta}_i(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta_i(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx$$

Daarmee:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right) \eta_i(x) dx$$

De vorige vergelijking drukt uit dat de afgeleide van de actie-integraal nul is als gevolg van het feit dat de variatie $\eta_i(x)$ willekeurig is, zolang ze verdwijnt aan de randen. Om deze integraal voor alle mogelijke $\eta_i(x)$ gelijk te laten zijn aan nul, moet de factor waarmee $\eta_i(x)$ vermenigvuldigd wordt, zelf nul zijn.

Dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijkingen, één voor elke functie $y_i(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \quad \text{voor alle } i = 1, \dots, n$$

Deze differentiaalvergelijkingen zijn de Euler-Lagrange vergelijkingen. Ze vormen de noodzakelijke voorwaarden voor het pad $y_i(x)$ dat de functionaal J stationair maakt.

2.3.2 Lagrange bewegingsvergelijking

Definieer de actie-integraal, d.i. de tijdsintegraal van de Lagrangiaan tussen twee tijdstippen, en toon aan dat de eis dat de actie-integraal extremaal is, resulteert in de Lagrange vergelijkingen.

De actie-integraal is gedefinieerd als:

$$I[q_k(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) dt$$

Hierin is $L = T - V$ de Lagrangiaan van het systeem, met:

- $q_k(t)$ de veralgemeende coördinaten,
- $\dot{q}_k(t)$ de bijhorende snelheden op tijdstip t

We eisen dat de actie stationair is voor de fysisch gerealiseerde beweging $q_k(t)$. Dit betekent:

$$\delta I = 0$$

Beschouw een kleine variatie rond $q_k(t)$:

$$q_k(t, \alpha) = q_k(t) + \alpha \eta_k(t)$$

met $\eta_k(t_1) = \eta_k(t_2) = 0$ (de variaties vallen weg aan de randpunten).

We maken van de actie een functie van α :

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t, \alpha), \dot{q}_k(t, \alpha), t) dt$$

We vragen dan:

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Werk deze afgeleide uit met de kettingregel:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} \right) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \eta_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\eta}_k(t) \right) \right] dt$$

Gebruik partiële integratie op de term met $\dot{\eta}_k$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\eta}_k dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \eta_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \eta_k dt$$

Omdat $\eta_k(t_1) = \eta_k(t_2) = 0$, valt het grenslid weg.

Na substitutie krijgen we:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \eta_k(t) dt = 0$$

Dit moet gelden voor alle functies $\eta_k(t)$ die nul zijn aan de randpunten. Daarom moet de factor tussen vierkante haken nul zijn:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

of:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Deze differentiaalvergelijking is precies de Lagrange-bewegingsvergelijking. Ze beschrijft hoe een systeem zich ontwikkelt in de tijd, en volgt rechtstreeks uit het principe van stationaire actie (Hamiltonprincipe).

2.5.1 Invariantie van de Lagrangevergelijkingen

Toon aan dat de Lagrangiaan niet-uniek is, m.a.w dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn als een totale tijdsafgeleide van een functie van de veralgemeende coördinaten en de tijd bij de Lagrangiaan wordt opgeteld.

Concreet, beschouw een systeem met Lagrangiaan:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}h(q_k, t)$$

met $h(q_k, t)$ een gladde functie. We willen aantonen dat de Euler-Lagrangevergelijkingen voor L en L' dezelfde zijn.

De Euler-Lagrangevergelijkingen voor een Lagrangiaan $L'(q_k, \dot{q}_k, t)$ luiden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0$$

Uit de definitie van L' volgt:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt}h(q_k, t) \right)$$

We gebruiken de kettingregel voor de totale afgeleide:

$$\frac{d}{dt}h(q_k, t) = \sum_l \frac{\partial h}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial h}{\partial t}$$

Daaruit volgt:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt}h(q_k, t) \right) = \frac{\partial h}{\partial q_k}$$

Dus:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k}$$

We differentiëren:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

Gebruik opnieuw de kettingregel:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) = \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

Daaruit volgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

We differentiëren:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_l \frac{\partial h}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

Toepassing van de afgeleide geeft:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

Merk op dat de termen

$$\sum_l \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}$$

voorkomen in zowel $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right)$ als in $\frac{\partial L'}{\partial q_k}$, en dus exact gelijk zijn en tegen elkaar wegvallen in het verschil.

Neem het verschil:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

De Euler-Lagrangevergelijkingen voor L' en L zijn dus identiek en beide gelijk aan nul:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0\end{aligned}$$

De Lagrangevergelijkingen zijn invariant onder toevoeging van een totale tijdsafgeleide van $h(q_k, t)$.

Een andere manier om dit probleem aan te pakken is aan de hand van variationele formulering, dus aan de hand van de actie-integraal:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) dt$$

Uit de variationele formule volgt dat een Lagrangiaan L bepaald is tot op een totale tijdsafgeleide na, namelijk van een functie van de coördinaten en de tijd. We kunnen een nieuwe Lagrangiaan L' die hieraan wel voldoet definiëren:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}(h(q_k, t))$$

De nieuwe actie-integraal is:

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) + \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t)) \right)$$

Hierin wordt de bijdrage van de tijdsafgeleide term gereduceerd tot:

$$I' = I + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t)) dt = I + h(q_k(t_2), t_2) - h(q_k(t_1), t_1)$$

Deze extra term heeft dezelfde waarde voor alle paden die de beginconfiguraties $q_k(t_1)$ en eindconfiguraties $q_k(t_2)$ verbinden, dus is onafhankelijk van de vorm van het pad. Vanwege de stationariteit van I en I' hebben beiden dezelfde oplossing voor het pad.

2.6.1 Canonisch toegevoegd moment

Voer algemeen het canonisch toegevoegd moment p_k van een veralgemeende variabele q_k in. Toon aan dat dit een behouden grootte is als de Lagrangiaan niet van de variabele q_k afhangt (m.a.w. q_k is een cyclische coördinaat).

Toon aan: als $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, dan volgt dat $\frac{dp_k}{dt} = 0$, dus p_k is constant in de tijd.

Het canonisch toegevoegd moment bij een veralgemeende coördinaat q_k wordt gedefinieerd als:

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Dit is de partiële afgeleide van de Lagrangiaan naar de snelheid $\dot{q}_k$. Fysisch correspondeert dit vaak met een impuls of impulsmoment.

De Euler-Lagrangevergelijking voor een systeem luidt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Substitutie van de definitie van p_k geeft:

$$\frac{d}{dt}(p_k) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Een coördinaat q_k noemt men cyclisch als deze niet expliciet voorkomt in de Lagrangiaan:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Invullen in de eerder afgeleide relatie:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{constante}$$

Het canonisch toegevoegd moment $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ is een behouden grootte als q_k een cyclische coördinaat is, dus als $\partial L / \partial q_k = 0$.

Via Noether's theorema komt het behoud van p_k overeen met een symmetrie in de beweging:

- als q_k een translatiecoördinaat is $\Rightarrow p_k$ is impuls
- als q_k een rotatiecoördinaat is $\Rightarrow p_k$ is impulsmoment

2.6.2 Totale impuls veralgemeende coördinaten

Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een translatie van het systeem in een bepaalde richting. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van de totale impuls volgens deze richting een behouden grootte is.

Als een veralgemeende coördinaat q_1 overeenkomt met een translatie in een vaste richting $\vec{n}$, en de potentiaal V is invariant onder die translatie (m.a.w. $\partial V / \partial q_1 = 0$), dan is de projectie van de totale impuls $\vec{P} \cdot \vec{n}$ een behouden grootte.

Veronderstel dat bij een infinitesimale verandering dq_1 van q_1 het hele systeem over een afstand $dq_1 \cdot \vec{n}$ verschuift:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots) + dq_1 \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} &= \vec{n}\end{aligned}$$

Dit is de definitie van een translatie in richting $\vec{n}$. Omdat alle $\vec{r}_i$ lineair afhangen van q_1 met dezelfde verschuivingsvector $\vec{n}$, is $\partial \vec{r}_i / \partial q_1 = \vec{n}$ constant.

De kinetische energie is onafhankelijk van de keuze van de oorsprong, dus:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

Dit kunnen we ook aantonen uit het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Wanneer we partieel afleiden naar q_1 :

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right) \dot{q}_k \right] = \sum_k \frac{\partial \vec{n}}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

Aangezien $\vec{n}$ constant is. Dit bevestigt dat de kinetische energie T niet afhangt van q_1 , zodat:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1$$

met Q_1 de veralgemeende kracht geassocieerd met q_1 . De veralgemeende kracht is:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{n} = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

De Lagrangevergelijking voor q_1 geeft:

$$\dot{p}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1$$

We bekijken nu de betekenis van het veralgemeende moment p_1 . Dit wordt via de Lagrangiaan gedefinieerd als:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$$

Aangezien de Lagrangiaan gegeven is door:

$$L = T - V$$

en de potentiaal V niet afhangt van de snelheden (conservatieve krachten, dus: $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = 0$), volgt dat de afgeleide enkel op de kinetische energie werkt.

De kinetische energie van het volledige systeem luidt:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

We gebruiken uit het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n}$$

En dus:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

De projectie van de totale impuls van het systeem in de richting $\vec{n}$ is dus gelijk aan het veralgemeende moment behorend bij de translatiecoördinaat q_1 .

Aangezien:

$$\dot{p}_1 = Q_1$$

volgt uit de gevonden relaties:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} \cdot \vec{n}) = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Als het potentiaal invariant is onder verandering van de veralgemeende coördinaat, dan is:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 = 0$$

In dat geval is $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ en volgt:

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \text{constant}$$

Als een veralgemeende coördinaat overeenkomt met een translatie van het hele systeem in een vaste richting $\vec{n}$, en de potentiaal is invariant onder deze translatie, dan is de projectie van de totale impuls op $\vec{n}$ een behouden grootheid.

2.6.3 Totale draaimoment veralgemeende coördinaten

Onderstel een conservatief systeem, en stel dat een veralgemeende coördinaat correspondeert met een rotatie van het systeem rond een bepaalde as. Toon aan dat als de potentiaal invariant is onder een verandering van deze coördinaat, de projectie van het totaal draaimoment volgens deze richting een behouden grootte is.

Stel dat een infinitesimale verandering dq_1 een rotatie over een hoek dq_1 rond een vaste as met richting $\vec{n}$ veroorzaakt.

In het cirkelvlak door de rotatie-as geldt dat deze verandering:

- $\perp \vec{n}$, loodrecht op de rotatie-as staat
- $\perp \vec{r}_i$, loodrecht op de originele vector staat

Dan ondergaan de positievectoren van de deeltjes de volgende verandering:

$$\vec{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots) + dq_1 \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i)$$

Daaruit volgt:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n} \times \vec{r}_i$$

De kinetische energie kan niet afhangen van van de keuze van de oriëntatie van het assenstelsel, zodat:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

Dit kunnen we ook aantonen uit het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Wanneer we partieel afleiden naar q_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_1} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right) \dot{q}_k \right] \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\vec{n} \times \vec{r}_i) \dot{q}_k \right] = \vec{n} \times \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

We gebruiken de kettingregel:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (\dot{\vec{r}}_i^2) = 2\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_1} = 2\dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i) = 0$$

De kinetische energie is:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

is dus ook niet van q_1 afhankelijk. Daaruit volgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1$$

met Q_1 de veralgemeende kracht geassocieerd met q_1 .

Aangezien we werken met een conservatief systeem en V niet afhangt van de snelheden, hebben we:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$$

met p_1 de veralgemeende toegevoegd moment geassocieerd met q_1 .

We nemen de afgeleide naar $\dot{q}_1$:

$$p_1 = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1}$$

We gebruiken nu de eigenschap:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \vec{n} \times \vec{r}_i$$

Invullen geeft:

$$p_1 = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i)$$

Met behulp van de vectoridentiteit:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Kunnen we dit herschrijven als:

$$p_1 = \vec{n} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)$$

En dus:

$$p_1 = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

waarbij het totale draaimoment gegeven is door:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

We bekijken nu de betekenis van Q_1 . Volgens de definitie:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i)$$

Opnieuw gebruiken we de vectoridentiteit om te herschrijven:

$$= \vec{n} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{n} \cdot \vec{N}$$

De veralgemeende kracht Q_1 is dus de projectie van het totale krachtmoment $\vec{N}$ op de rotatie-as $\vec{n}$.

We brengen nu alles samen in de Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \implies \frac{d}{dt} (\vec{n} \cdot \vec{L}) = \vec{n} \cdot \vec{N}$$

Aangezien het scalair product symmetrisch is:

$$\implies \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{n}) = \vec{N} \cdot \vec{n}$$

Indien V niet afhangt van q_1 , dan is q_1 een cyclische coördinaat en is $Q_1 = 0$. Dan volgt:

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{n}) = 0 \implies \vec{L} \cdot \vec{n} = \text{constante}$$

We besluiten dat als een veralgemeende coördinaat overeenkomt met een rotatie van het systeem en de potentiaal invariant onder die rotatie, de projectie van het totale draaimoment op de rotatie-as behouden blijft. Dit volgt rechtstreeks uit de Lagrangevergelijkingen en de interpretatie van het veralgemeend moment en de veralgemeende kracht.

2.7.1 Hamiltoniaan behouden grootheid

Toon aan dat in geval van holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve gegeven krachten, de Hamiltoniaan

$$h = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$$

van het systeem een behouden grootheid is.

Indien de positievectoren $\vec{r}_i$ alleen afhangen van de veralgemeende coördinaten q_k , en niet expliciet van de tijd:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$$

dan volgt uit de kettingregel voor de snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

De Lagrangiaan is dan van de vorm:

$$L(q_k, \dot{q}_k) = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k)$$

waarbij er dus geen expliciete tijdsafhankelijkheid is:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Via de kettingregel geldt:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

Gebruik de Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

en vervang:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

Herken dat dit de tijdsafgeleide is van het product:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

We definiëren de Hamiltoniaan als:

$$h = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$$

Dan geldt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \frac{dL}{dt}$$

Substitueer uit vorige stap:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dL}{dt} - \frac{dL}{dt} = 0$$

De Hamiltoniaan is constant in de tijd:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow h = \text{constante}$$

Bijgevolg is de Hamiltoniaan een behouden grootheid indien:

- de Lagrangiaan niet expliciet van de tijd afhangt (conservatieve krachten),
- en de coördinaten $\vec{r}_i$ enkel afhangen van de veralgemeende coördinaten q_k , dus geen tijdsafhankelijke bindingen.

2.7.2 Hamiltoniaan als energie

Toon aan, via de stelling van Euler, dat in dit geval de Hamiltoniaan correspondeert met de totale energie van het systeem.

We veronderstellen:

- Holonome, tijdsonafhankelijke bindingen: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$
- Conservatieve krachten: $V = V(q_1, \dots, q_n)$, dus onafhankelijk van $\dot{q}_k$
- De kinetische energie is een homogene functie van graad 2 in $\dot{q}_k$

De Lagrangiaan is dan:

$$L(q_k, \dot{q}_k) = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k)$$

De Hamiltoniaan is gedefinieerd als:

$$h = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

De algemene stelling van Euler stelt dat voor een homogene functie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ van graad n geldt:

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n f$$

We starten met de algemene definitie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Substitueer $\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

Door de dubbele som uit te werken:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left\{ \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \right\}$$

In ons geval is T een homogene functie van graad 2 in de snelheden $\dot{q}_k$, dus:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

We gebruiken dat $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ omdat V niet van $\dot{q}_k$ afhangt:

$$\begin{aligned} h &= \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \\ &= \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - (T - V) \\ &= 2T - (T - V) = T + V \end{aligned}$$

De Hamiltoniaan komt in dit geval exact overeen met de totale energie:

$$h = T + V$$

Dit is alleen geldig onder de veronderstellingen dat:

- De coördinaten $\vec{r}_i(q_k)$ niet expliciet van tijd afhangen,
- De krachten afgeleid zijn van een tijdsonafhankelijke potentiaal.

In alle andere gevallen (zie bijv. 2.7.3), kunnen extra termen optreden zoals T_0 en T_1 die ervoor zorgen dat $h \neq T + V$.

2.7.3 Hamiltoniaan Tijdsafhankelijkheid

Ga na wat in geval van conservatieve gegeven krachten, maar tijdsafhankelijke holonome bindingen, de gevolgen zijn voor de Hamiltoniaan van het systeem.

Wanneer bindingen expliciet van de tijd afhangen, schrijven we de relatie tussen Cartesische coördinaten $\vec{r}_i$ en veralgemeende coördinaten q_k als:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t)$$

De veralgemeende snelheden worden dan:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Door expliciete tijdsafhankelijkheid is de kinetische energie T geen homogene functie meer van tweede graad in $\dot{q}_k$, maar bevat nu termen van eerste en nulde graad:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0$$

met

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \\ T_1 &= 2 \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ T_0 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

de 2e, 1e en 0e graad afhankelijk van de veralgemeende snelheden $\dot{q}_k$.

De potentiaal V , oorspronkelijk afgeleid uit een potentiaalfunctie van Cartesische coördinaten, hangt nu ook expliciet af van de tijd wanneer deze wordt uitgedrukt in veralgemeende coördinaten:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_i), \quad V(q_k, t) = V(\vec{r}_i(q_k, t))$$

Dit leidt expliciet tot:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Omdat het systeem voldoet aan de Lagrangevergelijkingen, geldt volledig uitgeschreven:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Door herschikking krijgen we:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

De Hamiltoniaan h wordt volledig uitgeschreven als:

$$h = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T - V) = 0T_0 + 1T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 - T_0 + V$$

Ook is duidelijk dat:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

De expliciete tijdsafhankelijkheid betekent dat er geen behoud van energie meer bestaat. Energie wordt via tijdsafhankelijke bindingen uitgewisseld tussen het systeem en externe omgeving.

Door expliciet tijdsafhankelijke bindingen stemt de Hamiltoniaan niet meer overeen met de totale energie, behalve als expliciete tijdsafhankelijkheden volledig afwezig zijn (dus wanneer $T_0 = T_1 = 0$).

3 Centrale kracht problemen

3.1.1 Lagrangevergelijkingen op 2 deeltjes

Toon aan, via de Lagrange vergelijkingingen, dat de beweging van 2 deeltjes die interageren via conservatieve krachten, equivalent is met enerzijds de vrije beweging van het zwaartepunt, anderzijds de beweging van 1 deeltje met gereduceerde massa onder een potentiaal die enkel afhangt van de relatieve positie van de 2 deeltjes.

We nemen aan dat de kracht conservatief is, dus er bestaat een potentiaal V zodat:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= -\nabla_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{F}_{12} &= -\nabla_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21}\end{aligned}$$

De kracht hangt enkel af van het verschil $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, wat consistent is met translatie-invariantie (geen afhankelijkheid van de absolute posities).

We beschrijven de posities van de twee deeltjes als functie van de tijd:

$$\begin{aligned}- m_1 : x_1(t), y_1(t), z_1(t) &\Rightarrow \vec{r}_1(t) \\ - m_2 : x_2(t), y_2(t), z_2(t) &\Rightarrow \vec{r}_2(t)\end{aligned}$$

Definitie van het massamiddelpunt:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relatieve positievector:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Omgekeerd drukken we $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ uit in functie van $\vec{R}$ en $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Afgeleiden naar de tijd:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

We starten met:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

Substitueer de snelheden:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

Dan:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2$$

Werk de kwadraten uit en groepeer termen:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{\vec{r}}^2$$

Definieer de gereduceerde massa:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Dan:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

Bij een conservatieve kracht geldt: $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r})$, dus:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

De Lagrangiaan splitsen we als:

$$L = L_{\text{cm}} + L_{\text{rel}} \\ L_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2, \quad L_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

de componenten voor de beweging van het zwaartepunt L_{cm} en de relatieve beweging L_{rel} . Beschouw de component R_x van het massamiddelpunt. Deze komt niet voor in L :

$$\frac{\partial L}{\partial R_x} = \frac{\partial L_{\text{cm}}}{\partial R_x} = 0 \Rightarrow R_x, R_y, R_z \text{ zijn cyclische coördinaten}$$

Dit betekent dat de bijhorende beweging niet beïnvloed wordt door de krachten en de lineaire impuls (of impulsmoment) constant is.

De Euler-Lagrangevergelijking geeft:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_x} = \frac{\partial L_{\text{cm}}}{\partial \dot{R}_x} = M\dot{R}_x$$

Dus:

$$\dot{\vec{R}} = \text{constant}$$

Het massamiddelpunt beweegt dus vrij en eenparig.

Beschouw nu de relatieve beweging. Omdat $L = L_{\text{cm}} + L_{\text{rel}}$, geldt:

$$\frac{\partial L}{\partial r_x} = \frac{\partial L_{\text{rel}}}{\partial r_x} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial r_x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_x} = \frac{\partial L_{\text{rel}}}{\partial \dot{r}_x} = \mu\dot{r}_x$$

De Euler-Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_x} = \mu\ddot{r}_x + \frac{\partial V}{\partial r_x} = 0 \\ \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r})$$

We verkrijgen dus een tweede-orde vectorvergelijking voor $\vec{r}(t)$: de beweging van een fictief deeltje met massa μ onder invloed van de kracht afgeleid uit de potentiaal $V(\vec{r})$, die enkel afhankelijk van de onderlinge afstand. Dit beschrijft de relatieve beweging volledig.

Een systeem van twee deeltjes die op elkaar inwerken via een conservatieve kracht, kan je splitsen in twee onafhankelijke problemen:

- Het massamiddelpunt beweegt alsof er geen kracht op werkt (vrije beweging);
- De relatieve positie tussen de deeltjes gedraagt zich alsof er maar één deeltje is, met een aangepaste massa, dat beweegt in een krachteveld.

Toegepast heb je bv. de beweging van de aarde rond een "stilstaande" zon.

3.2.1 Draaimoment uit een centrale kracht

Toon aan dat voor 1 deeltje onderworpen aan een conservatieve centrale kracht, de beweging plaatsvindt in een vlak, nl. het vlak door het krachtcentrum loodrecht op het draaimoment, dat een behouden grootheid is.

Het krachtmoment $\vec{N}$ is gedefinieerd als:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

waarbij:

- $\vec{r}(t)$: positievector van het deeltje,
- $\vec{F}$: kracht die op het deeltje werkt.

We willen aantonen dat dit krachtmoment verdwijnt in het geval van een centrale kracht.

Een centrale kracht hangt enkel af van de afstand tot een vast punt (meestal de oorsprong) en is gericht volgens de positievector $\vec{r}$:

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Hieruit volgt: $\vec{F} \parallel \vec{r}$.

We substitueren deze vorm van $\vec{F}$ in de definitie van $\vec{N}$:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{r} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{N} = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{1}{r} (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}$$

Omdat het vectorproduct van een vector met zichzelf nul is: $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$.

We gebruiken de algemene relatie:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

Dan volgt onmiddellijk:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{constant}$$

Het draaimoment is gedefinieerd als:

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)$$

Hieruit volgt:

- $\vec{L}$ staat loodrecht op zowel $\vec{r}(t)$ als $\dot{\vec{r}}(t)$.
- Omdat $\vec{L}$ constant is, blijven $\vec{r}(t)$ en $\dot{\vec{r}}(t)$ altijd in het vlak loodrecht op $\vec{L}$.
- Dit vlak verandert niet in de tijd.

De beweging van het deeltje vindt plaats in een vlak door de oorsprong dat loodrecht staat op de constante vector $\vec{L}$.

Bij een centrale kracht is er geen koppel dat de rotatie kan wijzigen. Het draaimoment is dus behouden en de beweging beperkt zich tot een vast vlak. Dit is essentieel voor de verdere analyse van centrale krachtsproblemen, zoals planeetbanen en Keplerwetten.

3.2.2 Centrale kracht zonder draaimoment

Ga over op bolcoördinaten en bespreek het particuliere geval als het draaimoment rond het krachtcentrum verdwijnt, en het deeltje op een rechte door het krachtcentrum beweegt.

Een centrale kracht is een kracht die steeds gericht is langs de verbindinglijn tussen het deeltje en een krachtcentrum in de oorsprong:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Het draaimoment $\vec{L}$ van het deeltje rond de oorsprong is:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$$

Als $\vec{L} = \vec{0}$, dan geldt:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$$

Dus: $\vec{r}(t)$ en $\dot{\vec{r}}(t)$ zijn altijd evenwijdig, en de richting van $\vec{r}(t)$ verandert niet. De beweging is radiaal langs een vaste richting: een rechte door de oorsprong.

We gebruiken bolcoördinaten (r, ψ, θ) , waarbij:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \psi \cos \theta & \dot{x} &= \dot{r} \sin \psi \cos \theta + r \cos \psi \cos \theta \dot{\psi} - r \sin \psi \sin \theta \dot{\theta} \\ y &= r \sin \psi \sin \theta & \Rightarrow \quad \dot{y} &= \dot{r} \sin \psi \sin \theta + r \cos \psi \sin \theta \dot{\psi} + r \sin \psi \cos \theta \dot{\theta} \\ z &= r \cos \psi & \dot{z} &= \dot{r} \cos \psi - r \sin \psi \dot{\psi} + 0 \end{aligned}$$

De bijhorende eenheidsvectoren zijn:

$$\vec{n}_r = \begin{pmatrix} \sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

De plaatsvector is:

$$\vec{r} = r\vec{n}_r$$

We nemen de afgeleide van $\vec{r}$:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\vec{n}_r) = \dot{r}\vec{n}_r + r\dot{\psi}\vec{n}_\psi + r\sin\psi\dot{\theta}\vec{n}_\theta$$

Daaruit volgt:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2(\dot{\psi}\vec{n}_\theta - \sin\psi\dot{\theta}\vec{n}_\psi)$$

We kiezen nu een vlakke beweging in het vlak $\psi = \frac{\pi}{2}$. Dan geldt:

$$\sin \psi = 1, \quad \dot{\psi} = 0$$

Daarmee wordt het draaimoment:

$$\vec{L} = -mr^2\dot{\theta}\vec{n}_\psi$$

De voorwaarde $\vec{L} = \vec{0}$ impliceert dan:

$$\dot{\theta} = 0$$

Dus zowel ψ als θ zijn constant: de richting verandert niet. Alleen de afstand tot het krachtcentrum varieert in de tijd.

Als het draaimoment nul is bij een centrale kracht, dan beweegt het deeltje langs een rechte lijn door het krachtcentrum: de richting verandert niet en $\dot{\vec{r}} \parallel \vec{r}$.

3.2.3 Perksnelheid uit conservatieve centrale kracht

Toon aan dat bij een algemene beweging onder invloed van een conservatieve centrale kracht de perksnelheid constant is, d.i. het oppervlak dat de positievector van het deeltje in zijn vlakke baan rond het krachtcentrum beschrijft is constant in de tijd.

Een deeltje met massa m beweegt onder invloed van een centrale kracht:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

Deze kracht is:

- conservatief: afgeleid uit een potentiaal $V(r)$;
- centraal: steeds gericht langs de vectorpositie $\vec{r}(t)$.

Omdat $\vec{F} \parallel \vec{r}$, is het krachtmoment $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, en dus blijft het draaimoment constant:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$$

$\vec{L}$ behoudt zijn richting, en dus ligt $\vec{r}(t)$ altijd in het vlak loodrecht op $\vec{L}$.

De beweging is dus vlak. Zonder verlies aan algemeenheid kiezen we het vlak van de beweging als het xy -vlak. In bolcoördinaten betekent dit:

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\psi} = 0$$

De snelheid wordt in poolcoördinaten geschreven als:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

De kinetische energie is dan:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

De Lagrangiaan volgt als:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Om de bewegingsvergelijkingen op te stellen via het Lagrange-formalisme, hebben we de volgende partiële afgeleiden nodig:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

θ komt niet expliciet voor in L ; dit impliceert een behoudswet.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

dit is het veralgemeend moment behorende bij θ .

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

deze term verschijnt in de radiale bewegingsvergelijking.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

dit geeft aanleiding tot de radiale impuls.

Deze afgeleiden zijn essentieel voor het opstellen van de Lagrangevergelijkingen, waarmee we zowel het behoud van draaimoment als de krachtenbalans in radiale richting kunnen afleiden.

Omdat θ cyclisch is, volgt uit de Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0$$

We definiëren het draaimoment:

$$\ell = mr^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

Uit de Lagrangevergelijking voor r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

Deze differentiaalvergelijking beschrijft de evolutie van de afstand $r(t)$ tot het krachtcentrum onder invloed van de centrale kracht en de centrifugale term $mr\dot{\theta}^2$ en wordt gebruikt in volgend bewijs.

De perksnelheid is de afgeleide van het oppervlak dat de vectorpositie $\vec{r}(t)$ beschrijft t.o.v. het krachtcentrum. Tijdens een infinitesimale draai $d\theta$:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Invullen van het behoud van draaimoment $\ell = mr^2 \dot{\theta}$ geeft:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{m} = \text{constante}$$

$\frac{dA}{dt} = \text{constant} \Rightarrow$ het deeltje doorloopt in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten.

Dit is exact de tweede wet van Kepler voor bewegingen onder invloed van een centrale kracht.

Het bewijs steunt volledig op:

- vlakke beweging door behoud van draaimoment;
- cyclische coördinaat θ ;
- kinetische energie in vlakke poolcoördinaten;
- geometrische interpretatie van oppervlakte per tijdseenheid.

3.2.4 Bewegingsvergelijking via behoud van draaimoment

Toon aan dat, via behoud van draaimoment, de bewegingsvergelijking voor een deeltje in een conservatief centraal krachtveld kan gereduceerd worden tot een 2e orde differentiaalvergelijking in de afstand tot het krachtcentrum, $r(t)$.

Een deeltje beweegt in een vlak onder invloed van een centrale kracht. In vlakke poolcoördinaten (r, θ) luidt de Lagrangiaan:

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Hierbij:

- $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$: kinetische energie
- $V(r)$: centrale potentiaal, enkel functie van r

We gebruiken de algemene vorm van de Lagrangevergelijkingen voor r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

De afgeleiden zijn:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} = m\ddot{r} \\ - \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \end{aligned}$$

Substitutie geeft:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}) &= 0 \\ \Rightarrow m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \end{aligned}$$

Aangezien θ cyclisch is, volgt uit de Lagrangevergelijking:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante}$$

ℓ is het behouden draaimoment rond het krachtcentrum.

Oplossen naar $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

We vervangen $\dot{\theta}$:

$$m\ddot{r} = mr \left(\frac{\ell}{mr^2} \right)^2 - \frac{dV}{dr} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

De radiale bewegingsvergelijking luidt:

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

Deze vergelijking beschrijft de evolutie van de afstand $r(t)$ van het deeltje tot het krachtcentrum, zonder dat $\theta(t)$ expliciet nodig is. Ze is een tweede-orde differentiaalvergelijking en vormt de basis voor verdere analyse van centrale krachtproblemen.

3.2.5 Bewegingsvergelijking uit behoud van energie en draaimoment

Toon aan dat via behoud van zowel energie als draaimoment, het probleem kan gereduceerd worden tot een 1e orde differentiaalvergelijking in $r(t)$. Geef een formele oplossing $r(t)$, $\theta(t)$.

Aangezien een centrale kracht een kracht is die altijd gericht is langs de positievector $\vec{r}$ en waarvan de grootte enkel afhangt van de afstand $r = |\vec{r}|$, vindt de beweging plaats in een vlak loodrecht op het draaimoment. We gebruiken dus vlakke poolcoördinaten (r, θ) .

De kinetische energie is:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

De potentiaalenergie is $V(r)$, zodat de Lagrangiaan wordt:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

θ is een cyclische coördinaat omdat L niet afhangt van θ . Het bijhorende canonieke moment is dan:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante}$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

De totale energie E is:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

Substitueer $\dot{\theta} = \ell/(mr^2)$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

Los deze vergelijking op naar $\dot{r}$:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}$$

We herschrijven:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = dt$$

Stel dat op begintijdstip t_0 de afstand $r(t_0)$ is. Integratie geeft:

$$t - t_0 = \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r') - \frac{\ell^2}{2mr'^2} \right)}}$$

Voor de hoekverandering differentieer je de draaimomentrelatie:

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2(t)}$$

Hiermee druk je de hoekverandering uit als een integraal in de tijd:

$$\frac{\ell}{m} \int_{t_0}^t \frac{1}{r^2(t')} dt' = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \theta(t) - \theta_0$$

Het probleem werd herleid tot twee kwadraturen: één voor tijd en één voor hoek, beide in functie van $r(t)$. Hiermee is de volledige baanbeschrijving in poolcoördinaten formeel bepaald, enkel gebruikmakend van behoud van energie en behoud van draaimoment.

3.3.1 Energie bij een radiale bewegingsvergelijking

Toon aan dat de 1e-orde radiale bewegingsvergelijking equivalent is met een 1-dimensionaal probleem met fictieve potentiaal gelijk aan de som van de echte potentiaal en de centrifugale bijdrage. Schets het verloop van de fictieve potentiaal in geval van de attractieve invers-kwadratische krachtwet, en geef een kwalitatieve bespreking van de beweging voor verschillende waarden van de energie.

We beschouwen één reëel deeltje met massa m onder invloed van een centrale kracht, die afgeleid is van een potentiaal $V(r)$. De beweging speelt zich af in een vlak, en we gebruiken poolcoördinaten (r, θ) .

De Lagrangiaan is:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

De θ -coördinaat is cyclisch. Het bijhorende veralgemeende moment is dus behouden:

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

De totale energie E van het deeltje is:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

Substitueer $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

We definiëren de fictieve potentiaal:

$$\hat{V}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Zodat:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \hat{V}(r)$$

Deze vergelijking toont dat de radiale beweging beschreven wordt door een 1D-probleem met potentiaal $\hat{V}(r)$.

De Lagrangevergelijking voor r :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

Vervang $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right) = -\frac{d\hat{V}}{dr}$$

We verkrijgen:

$$m\ddot{r} = -\frac{d\hat{V}}{dr}$$

Wat bevestigt dat het systeem onderhevig is aan een centrifugale bijdrage $\hat{V}(r)$.

We herschrijven:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - \hat{V}(r)) \Rightarrow \text{voorwaarde: } E \geq \hat{V}(r)$$

De mogelijke bewegingen van het deeltje worden volledig bepaald door de verhouding tussen de totale energie E en de fictieve potentiaal $\hat{V}(r)$. Er zijn vijf fysisch relevante gevallen:

Geval 1: $E = \hat{V}(r_1)$

- Het deeltje beweegt voort in tijd tot het zich bevindt op de afstand r_1 van dichtste benadering t.o.v. het krachtcentrum. $r < r_1$ is niet mogelijk, omdat r_1 de enige fysisch toegelaten afstand is voor deze energie.
- Op r_1 bevindt het deeltje zich op een keerpunt waar $\dot{r} = 0$. Het stopt daar radiaal, keert om, en beweegt terug in tegengestelde richting. De beweging is ongebonden.
- De radiale snelheid $\dot{r}(t)$ blijft positief terwijl het deeltje zich weer van het krachtcentrum wegbeweegt.

Geval 2: $E = 0$

- Bij gravitatie geldt vaak $\hat{V}(r) \rightarrow 0$ als $r \rightarrow \infty$. Dan is $\dot{r} \rightarrow 0$, zodat het deeltje net ontsnapt en niet in een baan terechtkomt. Dit is het grensgeval tussen gebonden en ongebonden beweging.

Geval 3: $E < 0$

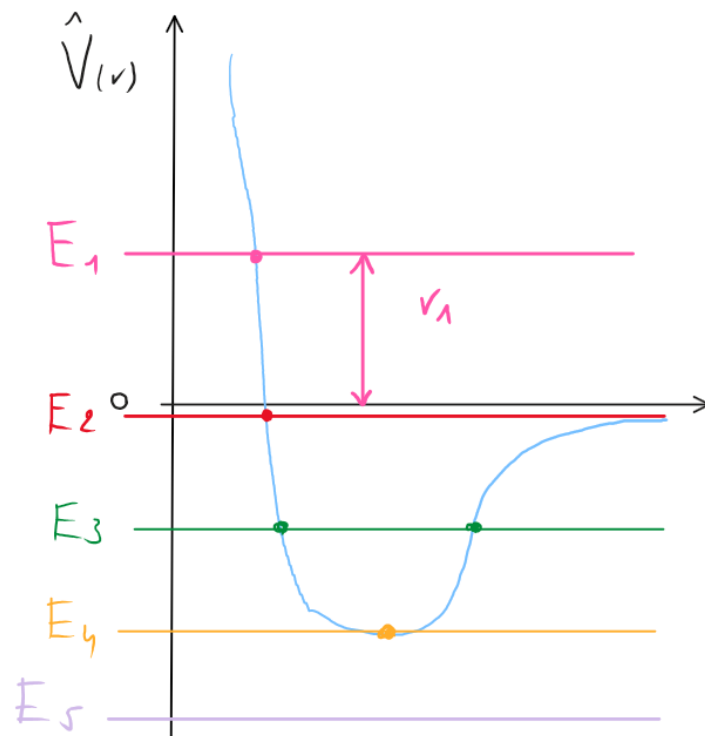
- De energie is kleiner dan de asymptotische waarde van $\hat{V}(r)$. Het deeltje voert een gebonden beweging uit, met twee keerpunten in r , de apsidale afstanden r_1 en r_2 .
- De radiale beweging is periodiek: oscillaties tussen deze minimum en maximum afstand.

Geval 4: $E = \hat{V}_{\min}$

- Het deeltje bevindt zich exact in het minimum van de effectieve potentiaal.
- Zowel $\dot{r} = 0$ als $\ddot{r} = 0$: de radiale beweging stopt en blijft daar.
- Het voert een cirkelvormige baan uit.

Geval 5: $E < \hat{V}_{\min}$

- In dit geval is $\dot{r}^2 < 0$ overal.
- Dit is fysisch onmogelijk: verboden toestand.



Figuur 1: Mogelijke energietoestanden voor de fictieve potentiaal $\hat{V}(r)$

3.5.1 Differentiaalvergelijking voor een orbitaal

Zet de 1e-orde radiale differentiaalvergelijking in $r(t)$ om in een rechtstreekse differentiaalvergelijking voor de orbitaal $u(\theta)$ (met $u = 1/r$). Bespreek, in geval van een gebonden beweging tussen twee keerpunten, de voorwaarde voor een gesloten orbitaal.

Voor een deeltje van massa m , dat zich onder invloed van een centrale kracht beweegt in een vlak, schrijven we de totale energie als som van kinetische en potentiële energie:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

Omdat de kracht centraal is, blijft het draaimoment ℓ behouden:

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

We vervangen dit in de energievergelijking:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

We drukken $\dot{r}$ uit via $\frac{dr}{d\theta}$, gebruikmakend van de kettingregel:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{\ell}{mr^2}$$

Daaruit volgt:

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Substitueer dit terug in de energievergelijking:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

We vermenigvuldigen beide zijden met $\frac{2m}{\ell^2}$ om te vereenvoudigen:

$$\frac{2mE}{\ell^2} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2m}{\ell^2}V(r)$$

We voeren de nieuwe veranderlijke $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ in, zodat:

$$r = \frac{1}{u}, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}, \quad \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

Ook:

$$\frac{1}{r^2} = u^2, \quad \frac{1}{r^4} = u^4$$

Substitueer dit in de vorige vergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{\ell^2} &= u^4 \cdot \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{\ell^2}V\left(\frac{1}{u}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{\ell^2}V\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{2mE}{\ell^2} \end{aligned}$$

We hebben:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

Dus als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ (afstand tot krachtcentrum neemt toe), dan moet:

$$\frac{du}{d\theta} < 0$$

We beperken ons tot deze tak van de beweging, en kiezen de negatieve wortel:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2} V\left(\frac{1}{u}\right)}$$

Breng om:

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2} V\left(\frac{1}{u}\right)}} = -d\theta$$

Integreer tussen u_0 en $u(\theta)$:

$$\theta - \theta_0 = \Delta\theta = -\int_{u_0}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2} V\left(\frac{1}{u}\right)}}$$

De baan is gebonden als het deeltje zich bevindt tussen twee keerpunten $r_{\min}$ en $r_{\max}$, of equivalent $u_{\max}$ en $u_{\min}$, waarbij de potentiële energie $V(r)$ en de totale energie E voldoen aan $V(r) < E$ binnen dat interval.

De beweging is gesloten als de hoekverplaatsing tussen twee opeenvolgende keerpunten $\Delta\theta$ een rationale veelvoud is van π , dus:

$$\Delta\theta = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2} V\left(\frac{1}{u}\right)}} = 2\pi q \quad \text{met } q \in \mathbb{Q}$$

In dat geval zal het deeltje na een eindig aantal heen-en-weer bewegingen opnieuw zijn oorspronkelijke positie bereiken met dezelfde richting van de snelheid. De volledige baan sluit zich dan na q passages tussen de keerpunten.

Indien $\Delta\theta$ geen rationale veelvoud is van π , dan vult het deeltje na verloop van tijd een ringvormig gebied rond het krachtcentrum. De baan is dan niet gesloten, maar precesserend.

3.7.1 Eccentriciteit en keerpunten van energie

In geval van een attractieve invers-kwadratische krachtwet: voer de eccentriciteit en bespreek de keerpunten voor de verschillende waarden van de energie $E < 0, E = 0, E > 0$.

We beschouwen een deeltje in een inverse kwadratische krachtwet, zoals een gravitatiekracht van de zon op een planeet.

Dit betekent:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{n}_r \quad \text{met } k = GmM$$
$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

We definiëren de “fictieve” 1-dimensionale potentiaal als:

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

De tweede term komt van de centrifugale kracht geassocieerd aan het impulsmoment:

$$\ell = mr^2\dot{\theta}$$

We zoeken het minimum van $V'(r)$ door de afgeleide naar r te berekenen:

$$\frac{dV'}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \right) = \frac{k}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

Deze afgeleide wordt nul bij een extremum. We lossen op:

$$\begin{aligned} \frac{k}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \left(k - \frac{\ell^2}{mr} \right) &= 0 \\ \Rightarrow k - \frac{\ell^2}{mr} &= 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{\ell^2}{mk} \end{aligned}$$

We bepalen nu de waarde van de potentiële energie op deze plaats. Dit is het minimum van de effectieve potentiaal:

$$V'_{\min} = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

We vervangen $r = \frac{\ell^2}{mk}$:

$$\begin{aligned} V'_{\min} &= -\frac{k}{\ell^2/(mk)} + \frac{\ell^2}{2m(\ell^2/(mk))^2} \\ &= -\frac{mk^2}{\ell^2} + \frac{mk^2}{2\ell^2} \\ &= -\frac{mk^2}{2\ell^2} \end{aligned}$$

Een fysisch toegestane baan vereist dat de energie nooit kleiner is dan dit minimum:

$$E \geq -\frac{mk^2}{2\ell^2}$$

Om een formule voor de excentriciteit te vinden herschrijven we dit als:

$$\begin{aligned} E + \frac{mk^2}{2\ell^2} &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{2E\ell^2}{mk^2} + 1 &\geq 0 \\ \Rightarrow 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2} &\geq 0 \end{aligned}$$

De wortel van deze uitdrukking definiëren we als de excentriciteit:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

De waarde van e bepaalt de aard van de baan:

- $E > 0 \Rightarrow e > 1$: hyperbool
- $E = 0 \Rightarrow e = 1$: parabool
- $E < 0 \Rightarrow e < 1$: ellips

De minimale waarde van e is nul en wordt bereikt als $E = V'_{\min}$.

De keerpunten van de beweging zijn de waarden van r waarvoor de totale energie gelijk is aan de effectieve potentiaal:

$$E = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

We herformuleren deze vergelijking met de substitutie $u = 1/r$:

$$E = -ku + \frac{\ell^2}{2m}u^2$$

We herschrijven dit tot een kwadratische vergelijking:

$$0 = \frac{\ell^2}{2m}u^2 - ku - E$$

We normeren deze vergelijking door te vermenigvuldigen met $\frac{2m}{\ell^2}$:

$$u^2 - \frac{2mk}{\ell^2}u - \frac{2mE}{\ell^2} = 0$$

De discriminant van deze vergelijking is:

$$D = \left(\frac{2mk}{\ell^2}\right)^2 + \frac{8mE}{\ell^2} = \frac{4m^2k^2 + 8mE\ell^2}{\ell^4} = \frac{4m^2k^2}{\ell^4} \left(1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}\right)$$

De oplossingen van de vergelijking zijn:

$$u_{\pm} = \frac{\frac{2mk}{\ell^2} \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{mk}{\ell^2}(1 \pm e)$$

De corresponderende afstanden tot het krachtcentrum zijn:

$$r_{\pm} = \frac{1}{u_{\pm}} = \frac{\ell^2}{mk(1 \pm e)}$$

Deze zijn de keerpunten van de baan, dus de uiterste afstanden tot het krachtcentrum.

- r_{per} (perihelion) is de dichtste afstand tot het krachtcentrum (zon).
- r_{ap} (aphelion) is de verste afstand tot het krachtcentrum.

Voor elliptische banen ($e < 1$) liggen deze punten respectievelijk op het dichtste en verste punt van de baan t.o.v. het brandpunt (krachtcentrum).

Afhankelijk van de energie zijn de keerpunten verschillend:

$E > 0$, $e > 1$: $u_- < 0$ is niet fysisch, enkel u_+ heeft zin:

$$r_{per} = \frac{\ell^2}{mk(1 + e)}$$

$E = 0$, $e = 1$: parabolische baan, één keerpunt, het aphelion ligt op oneindig:

$$r_{per} = \frac{\ell^2}{2mk}, \quad r_{ap} \rightarrow \infty$$

$E < 0$, $e < 1$: elliptische baan met twee keerpunten:

$$r_{per} = \frac{\ell^2}{mk(1 + e)}, \quad r_{ap} = \frac{\ell^2}{mk(1 - e)}$$

De excentriciteit bepaalt samen met de energie en het impulsmoment de vorm van de baan:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

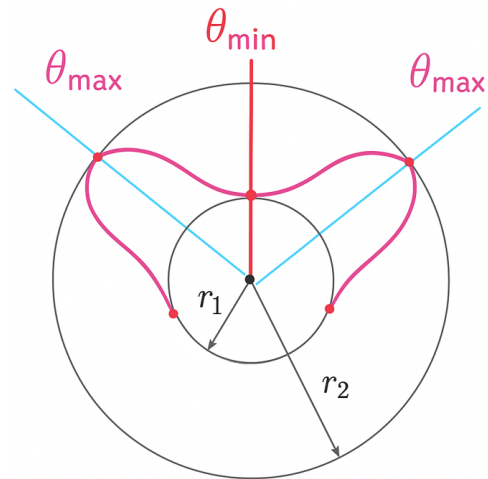
De keerpunten van de beweging (indien $e < 1$) volgen uit:

$$r_1 = r_{per} = \frac{\ell^2}{mk(1 + e)}$$

$$r_2 = r_{ap} = \frac{\ell^2}{mk(1 - e)}$$

Deze corresponderen met respectievelijk het perihelium (dichtste nadering) en het aphelium (verste verwijderde punt) in de baan van het deeltje rond het krachtcentrum.

Bij een elliptische baan komt het deeltje dus het dichtst bij het krachtcentrum in het perihelium en het verst in het aphelium, wat essentieel is voor de dynamica van planeetbanen en satellietbewegingen.



Figuur 2: Afstand tot het krachtcentrum in de baan eromheen

3.7.2 Kegelsneden als orbitalen

Toon aan dat de mogelijke orbitalen kegelsneden zijn, en dat de verschillende waarden van de energie corresponderen met respectievelijk ellipsen, parabolen, en hyperbolen.

We starten vanuit de orbitaalvergelijking zoals afgeleid uit behoud van energie en impulsmoment:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2}V(u)} \quad \text{met} \quad E = \frac{mk^2}{2\ell^2}(e^2 - 1)$$

Voor de inverse-kwadratische kracht geldt:

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku = V(u)$$

Substitutie in de orbitaalvergelijking geeft:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 + \frac{2mk}{\ell^2}u}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2}u - u^2 &= \frac{2m}{\ell^2} \cdot \frac{mk^2}{2\ell^2}(e^2 - 1) - \left(u^2 - \frac{2mk}{\ell^2}u\right) = \frac{m^2k^2}{\ell^4}(e^2 - 1) - \left(u - \frac{mk}{\ell^2}\right)^2 + \frac{m^2k^2}{\ell^4} \\ &= \frac{m^2k^2}{\ell^4}e^2 \left\{1 - \frac{1}{m^2k^2e^2} \left(u - \frac{mk}{\ell^2}\right)^2\right\} = \frac{m^2k^2}{\ell^4}e^2 \left[1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{\ell^2}{mk}u - 1\right)^2\right] \end{aligned}$$

We herschrijven dit:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{-u^2 + \frac{2mk}{\ell^2}u + \frac{2mE}{\ell^2}} = -\frac{mke}{\ell^2}\sqrt{1 - x^2}$$

waarbij we definiëren:

$$x := \frac{1}{e} \left(\frac{\ell^2}{mk}u - 1 \right) \Rightarrow u = \frac{mk}{\ell^2}(1 + ex) \Rightarrow du = \frac{mke}{\ell^2}dx$$

We herschrijven:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{mke}{\ell^2}\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \frac{mke}{\ell^2}d\theta = -\frac{mke}{\ell^2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Integratie van beide zijden levert:

$$\theta = \arccos x \Rightarrow x = \cos \theta$$

We lossen nu de definitie van x op naar u :

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{\ell^2}{mk}u - 1 \right) \Rightarrow u = \frac{mk}{\ell^2}(1 + e \cos \theta)$$

Terug naar r :

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2}(1 + e \cos \theta) \Rightarrow r(\theta) = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

De verkregen vergelijking is de standaardvorm van een kegelsnede in poolcoördinaten, met het krachtcentrum (de oorsprong) in een brandpunt:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/mk}{1 + e \cos \theta}$$

De excentriciteit e is een dimensieloze grootte die afhangt van de totale energie E en het impulsmoment ℓ . De grootte van e bepaalt het type kegelsnede:

- $e < 1$: ellips (gebonden orbitaal)
- $e = 1$: parabool (scheidingsgeval, grens gebonden/ongebonden)
- $e > 1$: hyperbool (ongebonden orbitaal)
- $e = 0$: cirkel als gebonden baan

3.7.3 Wetten van Kepler

Bespreek de drie wetten van Kepler voor planetenbeweging.

Eerste wet van Kepler

Een planeet beweegt in een ellips met de zon in één van de brandpunten.

In het kader van klassieke mechanica is dit het gevolg van de beweging onder invloed van een inverse-kwadratische centrale kracht, zoals zwaartekracht. In dit geval is de totale energie van de baan negatief (gebonden baan), en volgt uit de algemene baanvergelijking:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/mk}{1 + e \cos \theta}$$

met $e < 1$ voor een ellips.

Tweede wet van Kepler

De oppervlaktewet of wet der perken: de positievector van de planeet beschrijft in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten. Dit is een direct gevolg van behoud van het impulsmoment.

De oppervlakte die de positievector beschrijft in poolcoördinaten is:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Volgens behoud van draaimoment (impulsmoment):

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2m} \Rightarrow \text{constante}$$

Dit betekent dat het deeltje in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten doorloopt: de tweede wet van Kepler.

Derde wet van Kepler

Het kwadraat van de omlooptijd τ van een planeet is evenredig met de derde macht van de halve lange as van de ellipsvormige baan:

$$\tau^2 \propto a^3$$

Voor een ellips met grote en kleine halve assen a en b geldt:

$$A = \pi ab \quad \text{en} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2m} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{2\pi mab}{\ell}$$

Met karakteristiek voor een ellips:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Dit geeft:

$$\tau = \frac{2\pi m}{\ell} a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

De baanvergelijking is gegeven door:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

De lengte van de grote as is dan:

$$r(\theta = 0) + r(\theta = \pi) = 2a = \frac{\ell^2}{mk} \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right) = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{2}{1 - e^2}$$

Hieruit volgt:

$$1 - e^2 = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell}{\sqrt{mka}}$$

Vul aan in de omlooptijd:

$$\tau = \frac{2\pi m}{\ell} a^2 \cdot \frac{\ell}{\sqrt{mka}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2}$$

Kwadrateren we beide leden, dan vinden we:

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} a^3$$

zodat:

$$\tau^2 \propto a^3$$

Bij een tweelichaamssysteem vervangen we m door de gereduceerde massa $\mu = \frac{mM_\odot}{m+M_\odot}$, en voor gravitationele krachten geldt: $k = GM_\odot m$.

Dan volgt:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M_\odot + m)}}$$

In het limietgeval waarbij $m \ll M_\odot$, vinden we:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}}$$

$$\tau^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_\odot} \right) a^3$$

Dit is exact de derde wet van Kepler, en volgt dus rechtstreeks uit de klassieke mechanica.

3.9.1 De Laplace-Runge-Lenz vector

Toon aan dat in het geval van een attractieve invers-kwadratische krachtwet $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$, de LRL vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$ een behouden grootheid is, en geef een interpretatie..

De kracht is:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{n}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

De bewegingsvergelijking wordt:

$$\dot{\vec{p}} - \vec{F} = 0$$

vermenigvuldigt met het draaimoment:

$$0 = (\dot{\vec{p}} - \vec{F}) \times \vec{L} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} - \vec{F} \times \vec{L}$$

waaruit volgt:

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) + \vec{F} \times \vec{L}$$

Voor een centrale kracht is het krachtmoment $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, dus $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ zodat: $\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L}$

We vullen $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ en $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ in:

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) + \left(-\frac{k}{r^3}\vec{r}\right) \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$$

Toepassing van de vectoridentiteit:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

levert:

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) + \frac{mk}{r^3} \left[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}} \right]$$

Nu geldt:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{r}^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r^2) = r \dot{r}$$

en

$$\frac{mk}{r^3} \left[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}} \right] = \frac{mk}{r^2} \dot{r} \cdot \vec{r} - \frac{mk}{r} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{mk}{r} \vec{r} \right)$$

Zodat:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) + \frac{d}{dt} \left(-\frac{mk}{r} \vec{r} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r} \vec{r} \right) \end{aligned}$$

Definieer de Laplace-Runge-Lenz vector als:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r} \vec{r}$$

met behoud:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

We zoeken de hoek θ die $\vec{A}$ maakt met $\vec{r}$:

$$A r \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{r}(\vec{p} \times \vec{L}) - mk \frac{r^2}{r} = \vec{L}(\vec{r} \times \vec{p}) - mkr = \ell^2 - mkr$$

Bij het omvormen naar r volgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right)$$

Wanneer we deze vergelijken met de standaardvorm van een kegelsnede:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} (1 + e \cos \theta)$$

wordt duidelijk dat $A = emk$ is in grootte, evenredig met de excentriciteit.

Wanneer $\theta = 0$ vallen $\vec{A}$ en $\vec{r}$ samen. Dan is $\cos \theta = 1$ en wordt de afstand r minimaal. Het object bevindt zich dan in het perihelion. Hieruit kunnen we besluiten dat $\vec{A}$ naar het perihelion wijst.

Interpretatie:

- $\vec{A}$ ligt in het vlak van de beweging: $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$
- $\vec{A}$ wijst in de richting van het perihelion van de baan
- De grootte $A = mke$ is recht evenredig met de excentriciteit

De behouden grootheden $\vec{L}, \vec{A}, E$ lijken in totaal 7 constante vectorcomponenten en scalaren te bevatten:

- $\vec{L}$: 3 componenten
- $\vec{A}$: 3 componenten
- E : 1 waarde

Dit lijkt meer dan de 6 vrijheidsgraden (positie en snelheid van 1 deeltje in 3D), maar:

- Niet alle 7 zijn onafhankelijk. $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$ geeft 1 relatie
- De grootte $A = mke$, met e afhankelijk van E , geeft een tweede relatie

Daarom zijn slechts 5 van de 7 constanten onafhankelijk, wat klopt met de verwachting: 6 integratieconstanten min 1 opgelegde waarde (bv. beginpositie).

Het behoud van $\vec{A}$ geeft dus maar 1 onafhankelijke behouden grootte, zoals het hoort.

4 Kinematica van de beweging van een star lichaam

4.1.1 Arbitraire eenheidsvectoren

De onderlinge oriëntatie van twee Cartesische assenkruisen met gemeenschappelijke oorsprong kan worden vastgelegd door de richtingscosinussen $\cos \theta_{ij} = \vec{n}'_i \cdot \vec{n}_j$, zijnde de scalaire producten van de eenheidsvectoren volgende de assen van het ene stelsel met die van het andere stelsel. Toon aan dat de componenten van een arbitraire vector in de beide assenkruisen, met elkaar verbonden zijn door een lineaire transformatie op basis van de richtingscosinussen.

We beschouwen twee Cartesische assenstelsels met een gemeenschappelijke oorsprong:

- Origineel stelsel: basisvectoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$
- Nieuw stelsel: basisvectoren $\vec{n}'_1, \vec{n}'_2, \vec{n}'_3$

Beide basissen zijn orthonormaal, dus: $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \delta_{ij}$, $\vec{n}'_i \cdot \vec{n}'_j = \delta_{ij}$

We definiëren de richtingscosinus tussen $\vec{n}'_i$ en $\vec{n}_j$ als: $\cos \theta_{ij} = \vec{n}'_i \cdot \vec{n}_j$

We drukken een oude basisvector uit in termen van de nieuwe:

$$\vec{n}_i = \sum_j (\vec{n}_i \cdot \vec{n}'_j) \vec{n}'_j = \sum_j \cos \theta_{ji} \vec{n}'_j$$

Omgekeerd:

$$\vec{n}'_i = \sum_j (\vec{n}'_i \cdot \vec{n}_j) \vec{n}_j = \sum_j \cos \theta_{ij} \vec{n}_j$$

Deze expressies gebruiken het feit dat het scalair product de projectie van de ene eenheidsvector op de andere geeft.

Neem een willekeurige vector $\vec{G}$ in de ruimte. Dit is een vaste geometrische pijl, onafhankelijk van het gekozen assenstelsel. In het oude stelsel schrijven we:

$$\vec{G} = \sum_i G_i \vec{n}_i$$

Hier zijn de G_i de componenten van $\vec{G}$ in het oorspronkelijke assenstelsel.

We vervangen $\vec{n}_i$ door hun uitdrukking in termen van $\vec{n}'_j$:

$$\vec{G} = \sum_i G_i \left(\sum_j \cos \theta_{ji} \vec{n}'_j \right) = \sum_j \left(\sum_i G_i \cos \theta_{ji} \right) \vec{n}'_j$$

De componenten in het nieuwe stelsel zijn dus:

$$G'_j = \sum_i \cos \theta_{ji} G_i$$

De vector zelf verandert dus niet, enkel de coördinaten waarmee hij wordt beschreven, veranderen met het assenstelsel.

De richtingscosinussen geven de projectie van oude op nieuwe basisvectoren. De componenten van een vector transformeren via een lineaire combinatie waarbij de richtingscosinussen fungeren als projectiegevochten:

$$G'_j = \vec{G} \cdot \vec{n}'_j = \sum_i \cos \theta_{ji} G_i$$

De vector $\vec{G}$ zelf blijft invariant (verandert niet), enkel de componentvoorstelling verschuift door de verandering van basis.

4.1.2 Orthogonale matrix $[O]$

Toon aan dat een 3×3 matrix $[O]$ met als elementen de richtingscosinussen, een orthogonale matrix is.

Dat betekent:

$$[O]^T [O] = [1] \quad \text{en dus} \quad [O]^{-1} = [O]^T$$

Beschouw twee assenkruisen met gemeenschappelijke oorsprong: $Oxyz$ met basisvectoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ en $O'x'y'z'$ met basisvectoren $\vec{n}'_1, \vec{n}'_2, \vec{n}'_3$. We definiëren de matrix $[O]$ als:

$$[O]_{ij} = \cos \theta_{ij} = \vec{n}'_i \cdot \vec{n}_j$$

waarbij θ_{ij} de hoek is tussen $\vec{n}'_i$ en $\vec{n}_j$. De matrix $[O]$ bevat dus de richtingscosinussen tussen de oude en de nieuwe basisvectoren.

Omdat zowel $\{\vec{n}_i\}$ als $\{\vec{n}'_i\}$ orthonormale bases zijn, geldt:

$$\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k = \delta_{ik}, \quad \vec{n}'_i \cdot \vec{n}'_k = \delta_{ik}$$

met δ_{ik} de Kronecker-delta, die gelijk is aan 1 als $i = k$ en 0 anders.

We vinden wegens $\vec{n}_i = \sum_j \cos \theta_{ji} \vec{n}'_j$

$$\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k = \sum_{nm} \cos \theta_{ni} \cos \theta_{mk} \vec{n}'_n \cdot \vec{n}'_m = \sum_{nm} \cos \theta_{ni} \cos \theta_{mk} \delta_{nm} = \sum_n \cos \theta_{ni} \cos \theta_{nk}$$

zodat:

$$\delta_{ik} = \sum_n \cos \theta_{ni} \cos \theta_{nk}$$

De orthonormaliteitsbetrekkingen van de $\vec{n}'_i$ met $\vec{n}'_i = \sum_j \cos \theta_{ij} \vec{n}_j$ leiden op analoge wijze tot:

$$\vec{n}'_i \cdot \vec{n}'_k = \delta_{ik} = \sum_n \cos \theta_{in} \cos \theta_{kn}$$

Beschouwen we nu de 3×3 -matrix $[O]$ met:

$$[O]_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

dan volgt dat:

$$\delta_{ik} = \sum_n \cos \theta_{ni} \cos \theta_{nk} = \sum_n [O]_{ni} [O]_{nk} = \sum_n ([O]^T)_{in} [O]_{nk}$$

Dus:

$$\delta_{ik} = ([O]^T [O])_{ik} \Rightarrow [O]^T [O] = [1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Men kan even goed tonen dat $[O][O]^T = [1]$, door het verband:

$$\sum_n [O]_{in} [O]_{kn} = \sum_n [O]_{in} [O]_{nk}^T = ([O][O]^T)_{ik}$$

en dezelfde redenering te volgen. Ook dit product is de identiteit.

De matrix van richtingscosinussen die de overgang beschrijft tussen twee orthonormale bases is een orthogonale matrix:

$$[O]^T = [O]^{-1}$$

Dit betekent geometrisch dat rotatie en reflectie de lengtes en hoeken behouden bij een verandering van basis in een cartesisch coördinatensysteem.

4.4.1 Transformatie tussen assenkruisen

Toon aan dat $[O]$ een speciale orthogonale matrix is, d.i. $\det[O] = +1$, voor een transformatie tussen assenkruisen met eenzelfde (bvb. rechtshandig) karakter, en dat voor de beschrijving van starre lichamen dit de relevante transformaties zijn.

Beschouw twee orthonormale assenstelsels:

- oorspronkelijk stelsel: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,
- getransformeerd stelsel: $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$.

De vectoren $\vec{e}_i'$ kunnen worden uitgedrukt als lineaire combinatie van de oorspronkelijke basisvectoren:

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^3 [O]_{ij} \vec{e}_j$$

De matrix $[O]$ die deze transformatie beschrijft voldoet aan:

$$[O]^T [O] = [1]$$

De matrix noemen we orthogonaal. Matrices die aan orthogonaliteit voldoen hebben voor transformaties deze kenmerken:

- behoudt lengtes: $\|[O]\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$
- behoudt hoeken: de hoek tussen twee vectoren blijft dezelfde
- behoudt inproducten: $([O]\vec{x}) \cdot ([O]\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

Hieruit volgt automatisch:

$$[O]^{-1} = [O]^T$$

en dus:

$$\det([O]^T [O]) = \det([1]) = 1$$

alsook:

$$\det[O] \cdot \det[O] = (\det[O])^2 = 1 \Rightarrow \det([O]) = \pm 1$$

De matrix $[O]$ is dus orthogonaal en haar determinant is ± 1 . Er zijn twee mogelijkheden:

- $\det([O]) = +1$: de matrix stelt een rotatie voor. De oriëntatie van het stelsel blijft behouden (rechtshandig blijft rechtshandig).
- $\det([O]) = -1$: de matrix bevat een spiegeling, eventueel gecombineerd met een rotatie. De oriëntatie verandert (rechtshandig wordt linkshandig).

Rechtshandig betekent dat de vectoren $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ positief zijn volgens de rechterhandregel. Voor een linkshandig assenkruis krijgt het kruisproduct een tegengesteld teken: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_z$

Indien de twee assenkruisen hetzelfde karakter hebben — bijvoorbeeld beide rechtshandig — dan moet de transformatie tussen hen de oriëntatie behouden.

Dit betekent dat de determinant van de bijhorende orthogonale matrix moet zijn:

$$\det([O]) = +1$$

In dat geval spreekt men van een speciale orthogonale matrix:

$$SO(3) = \{[O] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid [O]^T [O] = [1], \det[O] = +1\}$$

Voor de beschrijving van een star lichaam zijn enkel transformaties toegestaan die afstanden én oriëntatie behouden. Dit vereist dat $[O]$ orthogonaal is met $\det([O]) = +1$, dus $[O] \in SO(3)$.

Bewegingen van een star lichaam bestaan daarom uit:

- een rotatie: $[O] \in SO(3)$, eventueel gecombineerd met
- een translatie van het coördinatenstelsel.

4.4.2 Eulerhoeken

Toon aan dat elke transformatie tussen twee Cartesische rechtshandige assenkruisen kan bekomen worden door een opeenvolging van drie eenvoudige rotaties rond coördinaatassen over de Eulerhoeken ϕ, θ, ψ .

We definiëren drie rotatiematrices, die telkens een rotatie voorstellen rond een coördinaat:

- $[O_1]$: rotatie over hoek ϕ rond de vaste z -as

$$[O_1] = R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $[O_2]$: rotatie over hoek θ rond de nieuwe x -as (ξ -as)

$$[O_2] = R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $[O_3]$: rotatie over hoek ψ rond de nieuwe z' -as

$$[O_3] = R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elke rotatie is een element van $SO(3)$: orthogonaal met determinant $+1$.

We brengen een vector met coördinaten $[X]$ in het oorspronkelijke stelsel naar het eindstelsel via drie opeenvolgende rotaties. De volgorde is cruciaal:

$$[X'] = [O_3][O_2][O_1][X]$$

waarbij:

- Eerst $[X_1] = [O_1][X]$: rotatie van x, y, z naar ξ, η, ζ
- Vervolgens $[X_2] = [O_2][X_1]$: kanteling naar ξ, η', ζ'
- Tenslotte $[X'] = [O_3][X_2]$: laatste rotatie naar x', y', z'

We werken het matrixproduct uit:

$$[O(\phi, \theta, \psi)] = R_z(\psi)R_x(\theta)R_z(\phi)$$

Dit levert expliciet:

$$[O] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Deze matrix is orthogonaal (kolommen zijn orthonormaal) en $\det[O] = +1$, dus $[O] \in SO(3)$.

Elke rotatie tussen twee Cartesische rechtshandige assenkruisen met gemeenschappelijke oorsprong kan uitgedrukt worden als het product van drie eenvoudige rotaties rond coördinaatassen, met hoeken ϕ, θ, ψ . Deze zijn de Eulerhoeken en definiëren eenduidig de relatieve oriëntatie tussen de twee stelsels.

Het bewijs toont aan dat de Eulerrotatie:

$$[O] = [O_3][O_2][O_1] \in SO(3)$$

elke mogelijke rotatie in de driedimensionale ruimte vertegenwoordigt.

4.6.1 Rotatie van een star lichaam

Toon aan dat elke $\text{SO}(3)$ matrix $[O]$ een rotatie in de 3-dimensionale ruimte rond een as door de oorsprong beschrijft, m.a.w. toon aan dat een transformatie $[X'] = [O][X]$ die de coördinaten van een punt $[X]$ omzet in de coördinaten van een nieuw punt $[X']$, voldoet aan: (1) de grootte van $[X]$ blijft onveranderd, en (2) er is een as door de oorsprong waarvan de punten onveranderd blijven onder de transformatie.

Een matrix $[O]$ behoort tot de groep $\text{SO}(3)$ als:

- $[O]^T[O] = [1]$ (orthogonaliteit), en
- $\det[O] = +1$ (speciale orthogonaliteit).

Dit impliceert dat $[O]$ een lengtebehoudende rotatie is, zonder spiegeling of inversie.

Zij $\vec{X}' = [O]\vec{X}$. Omdat de transformatie een rotatie is, eisen we dat:

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

in lengte. De coördinaten van de matrix $[X]$ worden gekozen als:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad [X'] = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

Dit betekent expliciet dat:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

met

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [\vec{X}]^T [\vec{X}]$$

We tonen dit formeel aan met de matrixnotatie:

$$[\vec{X}']^T [\vec{X}'] = ([O]\vec{X})^T ([O]\vec{X}) = [\vec{X}]^T [O]^T [O] [\vec{X}] = [\vec{X}]^T [\vec{X}]$$

Deze ketting van gelijkheden maakt gebruik van het feit dat $[O]^T = [O]^{-1}$ of $[O]^T [O] = [1]$. Hiermee is aangetoond dat de norm van de vector behouden blijft: $\|\vec{X}'\| = \|\vec{X}\|$, zoals vereist voor een rotatie.

We zoeken een vector $\vec{X} \neq \vec{0}$ waarvoor:

$$[O]\vec{X} = \lambda \vec{X}$$

Hierbij is $\lambda \in \mathbb{R}$ een eigenwaarde van $[O]$. De voorwaarde voor het bestaan van een niet-triviale oplossing is:

$$([O] - \lambda[1])\vec{X} = \vec{0} \quad \text{met} \quad \det([O] - \lambda[1]) = 0$$

Omdat $[O] \in \text{SO}(3)$ en dus reëel, orthogonaal en met $\det[O] = +1$, weten we dat $[O]$ altijd een reële eigenwaarde $\lambda = 1$ bezit. Dit volgt uit het feit dat de karakteristieke veelterm van $[O]$ altijd een reële nul heeft.

In het bijzonder:

$$[O]\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad ([O] - [1])\vec{X} = \vec{0}$$

We bewijzen nu via matrice-eigenschappen dat deze vergelijking een niet-triviale oplossing heeft:

$$\det([O] - [1]) = 0$$

Voor elke orthogonale matrix is:

$$([O] - [1])[O]^T = [O][O]^T - [1][O]^T = [1] - [O]^T$$

Voor het linkerdeel geldt vanwege $\det([O]^T) = \det([O]) = 1$:

$$\det([O] - [1])\det([O]^T) = \det([O] - [1])\det([O]^T) = \det([O] - [1])$$

Omdat $\det(-xA) = (-x)^n \det(A)$ voor een $n \times n$ matrix, geldt in het rechterdeel ook:

$$\det([1] - [O]^T) = \det([1]^T - ([O]^T)^T) = \det([1] - [O]) = (-1)^3 \cdot \det([O] - [1]) = -\det([O] - [1])$$

We vinden:

$$\det([O] - [1]) = -\det([O] - [1]) \Rightarrow \det([O] - [1]) = 0$$

Hieruit volgt dat er altijd een reële eenheidsvector $\vec{X}$ bestaat waarvoor $[O]\vec{X} = \vec{X}$. Dit is dus een vaste vector van de rotatie: de rotatie-as.

Voor de transformatie $[X'] = [O][X]$ met een $SO(3)$ matrix $[O]$ geldt dus:

- $\vec{X}' = [O]\vec{X}$ behoudt de lengte van $\vec{X}$;
- Er bestaat een as door de oorsprong waarvoor $\vec{X}' = \vec{X}$;
- Alle andere punten ondergaan een rotatie in het vlak loodrecht op deze as.

Dus elke matrix $[O] \in SO(3)$ beschrijft een rotatie rond een as door de oorsprong.

4.7.1 Eindige rotaties

Stel de coördinatentransformatie op voor een rotatie van het assenkruis over een hoek Φ , rond een as door de oorsprong met eenheidsvector $\vec{n}$, i.e. de rotatieformule:

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \Phi + (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}(1 - \cos \Phi) + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin \Phi$$

We beschouwen een punt P met plaatsvector $\vec{r}$ ten opzichte van de oorsprong O , dat door een rotatie over een hoek Φ rond de as met richting $\vec{n}$ wordt verplaatst naar een nieuw punt Q met plaatsvector $\vec{r}'$. $\vec{n}$ is een eenheidsvector die de rotatie-as, door O en N , aanduidt.

We construeren het vlak loodrecht op $\vec{n}$ dat door P gaat. Dit vlak snijdt de rotatie-as in een punt N . De vector $\vec{ON}$ is dan de orthogonale projectie van $\vec{r}$ op $\vec{n}$:

$$\vec{ON} = (\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

De vector van $\vec{n}$ naar P is:

$$\vec{NP} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

De vector $\vec{r}$ kan dus worden geschreven als:

$$\vec{r} = \vec{ON} + \vec{NP}$$

Door de rotatie over Φ verplaatst P zich naar Q over een cirkelvormige baan in het vlak loodrecht op $\vec{n}$, met middelpunt N . De afstand $|\vec{NP}| = |\vec{NQ}|$ blijft constant.

Beschouw een punt V als de orthogonale projectie van Q op NP . Dan is:

$$|\vec{NV}| = \cos \Phi |\vec{NQ}| = \cos \Phi |\vec{NP}| \quad \Rightarrow \quad \vec{NV} = \cos \Phi \vec{NP}$$

en:

$$|\vec{VQ}| = \sin \Phi |\vec{NQ}| = \sin \Phi |\vec{r} \times \vec{n}| \quad \Rightarrow \quad \vec{VQ} = \sin \Phi (\vec{r} \times \vec{n})$$

De vector $\vec{r} \times \vec{n}$ is orthogonaal op $\vec{n}$ en op $\vec{NP}$, met als grootte de cirkelstraal:

$$|\vec{r} \times \vec{n}| = \left| \left(\vec{NP} + (\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n} \right) \times \vec{n} \right| = |\vec{NP}| \cdot |\vec{n}| = |\vec{NP}|$$

$\vec{r}'$ kan geschreven worden als de som van de orthogonale vectoren:

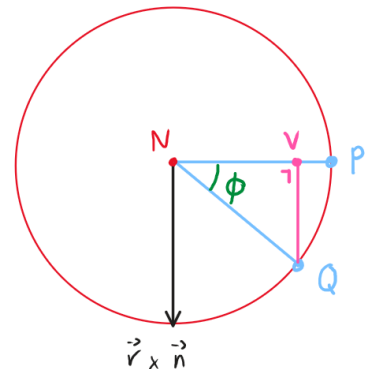
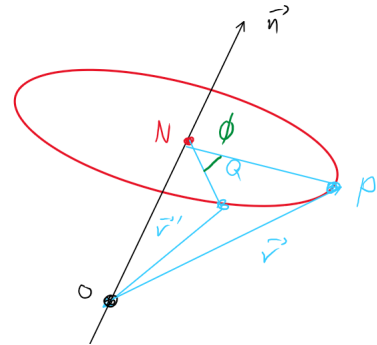
$$\vec{r}' = \vec{ON} + \vec{NV} + \vec{VQ}$$

Invullen geeft de rotatieformule:

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \Phi + (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}(1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \vec{n}) \sin \Phi$$

We hebben hiermee de coördinatentransformatie afgeleid voor een rotatie van het assenkruis over een hoek Φ rond een vaste as door de oorsprong met richting $\vec{n}$.

Deze formule laat toe om de positie van een vector na een rotatie in de ruimte uit te drukken in functie van zijn oorspronkelijke positie, de rotatiehoek en de rotatie-as.



4.8.1 Infinitesimale rotaties

Specialiseer de rotatieformule voor een eindige rotatie $\vec{r}' = \vec{r} \cos \phi + n(\vec{r} \cdot n)(1 - \cos \phi) + (\vec{r} \times n) \sin \phi$ in het geval van een infinitesimale rotatie over een hoek $d\phi$. Toon aan dat dit neerkomt op een transformatie van de vorm $[X'] = ([1] + [\epsilon])[X]$, met $[1]$ de eenheidsmatrix en $[\epsilon]$ een antisymmetrische infinitesimale matrix. Toon aan dat dergelijke infinitesimale rotaties commuteren tot op eerste orde.

Voor kleine Φ benadert tot $d\Phi$ gebruiken we de Taylorreeksen tot eerste orde:

$$\cos(d\Phi) = 1 - \frac{(d\Phi)^2}{2!} + \dots \approx 1$$

$$\sin(d\Phi) = d\Phi - \frac{(d\Phi)^3}{3!} + \dots \approx d\Phi$$

Daaruit volgt:

$$1 - \cos(d\Phi) \approx 0$$

Invullen in de oorspronkelijke rotatieformule:

$$\vec{r}' \approx \vec{r} + d\Phi(\vec{r} \times \vec{n})$$

De matrixnotatie hiervan is:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + d\phi \begin{bmatrix} x_2 n_3 - x_3 n_2 \\ x_3 n_1 - x_1 n_3 \\ x_1 n_2 - x_2 n_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + d\phi \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

We willen dit op een compacte manier herschrijven als:

$$[X'] = ([1] + [\epsilon])[X]$$

Aangezien de matrix $[\epsilon]$ antisymmetrisch is, moet gelden dat:

$$[\epsilon]^T = -[\epsilon]$$

Nemen we een $SO(3)$ matrix die infinitesimaal afwijkt van de eenheidsmatrix:

$$[O] = [1] + [\epsilon]$$

dan leidt de voorwaarde $[O]^T [O] = 1$ tot:

$$[O][O]^T = ([1] + [\epsilon])([1] + [\epsilon])^T \approx [1] + [\epsilon] + [\epsilon]^T = [1]$$

tot op 1e orde in $[\epsilon]$, door $[\epsilon][\epsilon]^T$ te verwaarlozen. Dan klopt:

$$[\epsilon]^T + [\epsilon] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\epsilon]^T = -[\epsilon]$$

dat $[\epsilon]$ een antisymmetrische matrix moet zijn.

Deze transformaties commuteren dus tot de 1e orde, maar geldt enkel voor infinitesimale rotaties. De volgorde waarin je de transformaties uitvoert speelt dan geen rol.

4.10.1 Corioliseffect

Gebruik het verband tussen de tijdsafgeleiden van vectorcomponenten in een space-fixed assenkruis en in een body-fixed assenkruis,

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

met ω de ogenblikkelijke rotatievector, bij de beschrijving van een bewegend deeltje in een assenkruis vast aan de aarde verbonden. Leidt het Corioliseffect af, en verklaar waarom luchtmassa's op het noordelijk halfrond in tegenwijzerzin circuleren rond een kern van lage-druk.

Voor een algemene tijdsafhankelijke vector $\vec{G}(t)$ geldt het fundamentele verband:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

Hierin is:

- $\left(\frac{d}{dt}\right)_s$: afgeleide in een inertiaal (ruimtevast) assenkruis,
- $\left(\frac{d}{dt}\right)_r$: afgeleide in een roterend (aardgebonden) assenkruis,
- $\vec{\omega}$: rotatievector van het roterende stelsel (hier: de aarde).

Deze formule zegt dat de verandering van een vector zoals gezien in het ruimtevaste stelsel, bestaat uit de lokale verandering plus een rotatiebijdrage.

Toegepast op de positievector $\vec{r}(t)$ van een deeltje:

$$\vec{v}_s = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

waarbij:

- $\vec{v}_s$: snelheid in het inertiaalstelsel,
- $\vec{v}_r$: snelheid zoals gemeten in het roterend stelsel.

Toegepast op de snelheidsvector $\vec{v}_s$ van een deeltje:

$$\left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_s$$

Hierin is het linkerlid de versnellingsvector $\vec{a}_s$ in het inertiaalstelsel. Vul het rechterlid in voor $\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{a}_s = \left(\frac{d}{dt}(\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r})\right)_r + \vec{\omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Aangezien $\vec{\omega}$ constant is:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Zo wordt de versnelling in het space fixed assenkruis gevonden:

$$\vec{a}_s = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

De tweede wet van Newton in het inertiaalstelsel geeft:

$$\vec{F} = m\vec{a}_s$$

Daarom:

$$\vec{F} = m(\vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

We herschrijven:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

De waarnemer in het roterend stelsel verklaart de versnelling alsof er drie krachten werken:

- de werkelijke kracht $\vec{F}$,
- de Corioliskracht: $\vec{F}_{\text{coriolis}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$,
- de centrifugaalkracht: $\vec{F}_{\text{centrifugaal}} = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$.

De Corioliskracht treedt op voor deeltjes die bewegen t.o.v. het assenkruis dat met de aarde roteert. Het Coriolis effect is een klein effect, maar is wel opvallend merkbaar bij bv. verplaatsingen van luchtmassa's in de atmosfeer. Het veroorzaakt een kracht loodrecht op de snelheid en op de rotatievector van de aarde door het punt. Op het noordelijk halfrond leidt dit tot afbuiging naar rechts → cyclonen draaien tegenwijzerzin.

Analyse op noordelijk halfrond:

Lokale coördinaten: $\hat{x}$ en $\hat{y}$ volgens het horizonvlak, $\hat{z}$: verticaal omhoog.

De Corioliskracht wordt gegeven door:

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$$

en bepaalt de richting van de afbuiging. Stel nu dat een deeltje beweegt naar een lagedrukgebied, in positieve y -richting, met een snelheid $\vec{v}_r = v \hat{y}$.

De afbuiging volgt uit het vectorproduct $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$. Aangezien op elke plaats op het noordelijk halfrond $\vec{\omega}$ evenwijdig staat aan de aardas en niet loodrecht op de positie op aarde met breedtegraad ϕ , is de onderliggende hoek tussen $\vec{\omega}$ en $\hat{z}$ dus ϕ . We moeten dus rekening mee houden dat $\vec{\omega}$ de projectie van de rotatievector op de z -as is:

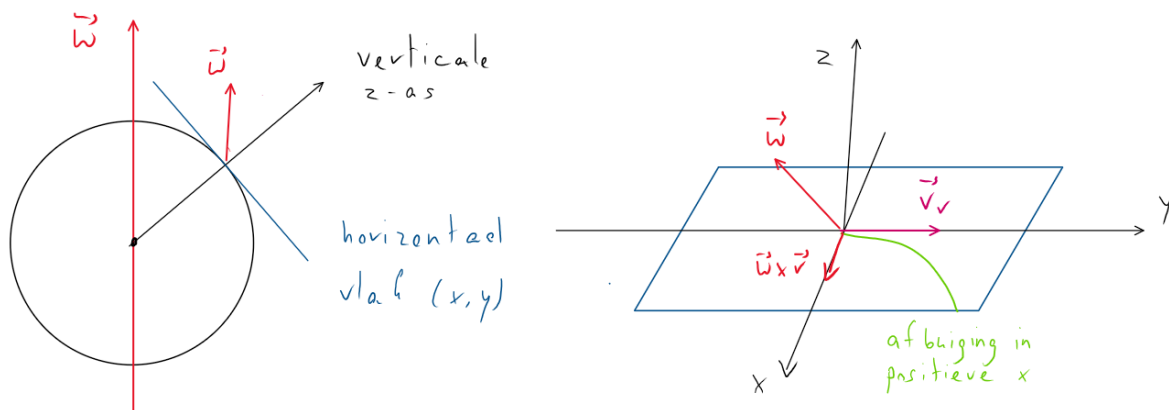
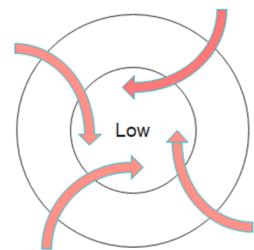
$$\vec{\omega} = \omega \cos \phi \hat{z}$$

De beweging in positieve y -richting is dan: $\vec{v}_r = v \hat{y}$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) = -2m(\omega \cos \phi \hat{z} \times v \hat{y}) = 2mv\omega \cos \phi \hat{x}$$

Afbuiging in positieve x -richting (circulatie tegenwijzerzin).

Op het noordelijk halfrond wordt een luchtmassa die richting een lagedrukgebied stroomt systematisch naar rechts afgebogen. Hierdoor ontstaat circulatie in tegenwijzerzin rond het centrum van lage druk.



5 De bewegingsvergelijkingen van starre lichamen

5.1.1 Draaimoment en traagheidstensor

Druk het draaimoment van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte (dat als oorsprong wordt genomen) uit in termen van de rotatievector, en voer de componenten van de traagheidstensor in.

Voor een systeem van massapunten m_n , met positievectoren $\vec{r}_n$ ten opzichte van een vast punt (de oorsprong), is het totale draaimoment gedefinieerd als:

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times p_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n$$

Hieruit volgt dat het draaimoment de som is van de bijdragen van elk massapunt, waarbij we het moment nemen van hun lineaire impuls rond de oorsprong.

$\vec{r}_n$ zijn de positievectoren van punten vast in het starre lichaam. De snelheid v_n is dus enkel afkomstig van de rotatie van het lichaam. Zo geldt:

$$\vec{v}_n = \left(\frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_s = \left(\frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{r}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

De snelheid van elk punt in een star lichaam is volledig bepaald door de rotatiesnelheid en zijn positievector.

Dit geeft voor het draaimoment:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

We gebruiken de vectoridentiteit:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Toegepast op $\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$:

$$\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = (\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n)\vec{\omega} - (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega})\vec{r}_n$$

Daaruit volgt:

$$\vec{L} = \sum_n m_n [(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n)\vec{\omega} - (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega})\vec{r}_n]$$

Schrijf $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en $\vec{r}_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})$.

We berekenen de i -de component van $\vec{L}$:

$$L_i = \sum_n m_n \left[\vec{r}_n^2 \omega_i - x_{ni} \sum_j x_{nj} \omega_j \right]$$

waarbij:

$$\vec{r}_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$$

Dit toont aan dat elke component van het draaimoment een gewogen combinatie is van de componenten van $\vec{\omega}$, waarbij de gewichten afhangen van de posities van de massa's.

We herschrijven dit als:

$$L_i = \sum_j \left(\sum_n m_n (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj}) \right) \omega_j = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

met:

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj})$$

De vorige uitdrukking komt overeen met een matrixvermenigvuldiging tussen een tweede-orde tensor $\overset{\leftrightarrow}{I}$ en een vector $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega}$$

Hierbij is $\overset{\leftrightarrow}{I}$ de traagheidstensor. Deze tensor beschrijft hoe moeilijk het is om het lichaam te doen roteren rond een bepaalde as. Hij hangt af van de massa en de afstand van elk punt tot de rotatieas.

De traagheidstensor heeft 2 soorten elementen. De diagonale elementen zijn de traagheidsmomenten. Zo is I_{xx} het traagheidsmoment rond de x -as.

$$I_{xx} = \sum_n m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n^2) = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2)$$

Ze drukken uit hoeveel massa er “ver” van de rotatie-as ligt en bepalen dus de weerstand tegen rotatie rond die as.

Anderszijds heb je ook de niet-diagonale elementen, de traagheidsproducten, zoals:

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum_n m_n x_n y_n$$

Ze geven aan in welke mate massa verspreid is in meerdere richtingen tegelijk en zijn gerelateerd aan rotatiekoppeling tussen assen.

De traagheidstensor $\overset{\leftrightarrow}{I}$ is symmetrisch, wat betekent dat de invloed van rotatie-as i op component j gelijk is aan die van j op i .

Wanneer het niet gaat om discrete massapunten, maar een massaverdeling met dichtheid $\rho(\vec{r})$, gaat de som over in een integraal:

$$I_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dx_1 dx_2 dx_3$$

Deze vorm laat toe om het draaimoment en de traagheidstensor ook te berekenen voor doorlopende massaverdelingen, zoals bij vaste lichamen.

Het draaimoment van een star lichaam is evenredig met de rotatievector via de traagheidstensor:

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega}$$

De traagheidstensor I vat samen hoe de massa van een lichaam verspreid ligt ten opzichte van een rotatiepunt. Deze bepaalt dus in welke mate het lichaam weerstand biedt aan veranderingen in zijn rotatietoestand. De structuur van I bepaalt ook hoe complex de beweging is bij rotatie rond willekeurige assen.

5.3.1 Traagheidsmoment en kinetische energie

Druk de kinetische energie van een star lichaam met 1 punt vast in de ruimte uit met behulp van de traagheidstensor en de rotatievector.

Voor een star lichaam dat roteert rond een vast punt, heeft elk massapunt n snelheid:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

We gebruiken deze snelheidsvector in de uitdrukking voor de kinetische energie:

$$T = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = \sum_n \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n)$$

Merk op dat:

$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n$$

het totale draaimoment is. Dus:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

We drukken $\vec{L}$ uit in functie van $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

Daaruit volgt:

$$\vec{L} = \sum_n m_n [\vec{r}_n^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_n]$$

We definiëren hiermee de traagheidstensor $\overset{\leftrightarrow}{I}$:

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega}$$

met:

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj})$$

We substitueren $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega}$ in de uitdrukking voor de kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega})$$

5.3.2 Massagewogen traagheidsmoment

Toon aan dat het traagheidsmoment rond een bepaalde as de massagewogen som is van de kwadraten van de afstanden van de massapunten tot de as.

We beginnen bij de definitie van het traagheidsmoment voor een willekeurige as rond de oorsprong:

$$I = \vec{n} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{n} = \sum_{ij} I_{ij} n_i n_j = \sum_n m_n \sum_{ij} n_i n_j (\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - x_{ni} x_{nj})$$

We werken de som uit. De eerste term wordt wegens de Kronecker delta een enkele som:

$$\sum_{ij} n_i n_j \vec{r}_n^2 \delta_{ij} = \sum_i n_i^2 \vec{r}_n^2 = \|\vec{n}\|^2 \vec{r}_n^2 = \vec{r}_n^2$$

omdat de lengte van een eenheidsvector 1 is.

De tweede term kunnen we wegens de symmetrie in de som splitsen in twee sommen:

$$\sum_{ij} n_i n_j x_{ni} x_{nj} = \sum_i n_i x_{ni} \sum_j n_j x_{nj}$$

wat natuurlijk twee keer hetzelfde inproduct is:

$$\sum_i n_i x_{ni} \sum_j n_j x_{nj} = (\vec{n} \cdot \vec{r}_n)^2$$

Wanneer we dit alles terug in de uitdrukking voor het traagheidsmoment steken krijgen we:

$$I = \sum_n m_n (\vec{r}_n^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_n)^2)$$

We kunnen het traagheidsmoment interpreteren als een massagewogen som van de kwadraten van de loodrechte afstanden van de posities van de deeltjes tot de rotatie-as.

5.4.1 Traagheidstensor rotaties

Toon aan dat onder een rotatie van het assenkruis de componenten van de traagheidstensor $I_{i'j'}$ in het nieuwe assenkruis verbonden zijn met componenten I_{ij} in het oorspronkelijke assenkruis door

$$I_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} I_{ij}$$

met $[O]$ de transformatiematrix met elementen

$$[O]_{i'i} = n'_{i'} \cdot n_i$$

en n_i eenheidsvectoren volgens de assen van het oorspronkelijke assenkruis, $n'_{i'}$ eenheidsvectoren volgens de assen van het nieuwe assenkruis.

De component I_{ij} van de traagheidstensor wordt gegeven door:

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj})$$

met $\vec{r}_n^2 = \vec{r}_n \cdot \vec{r}_n$ en $x_{ni} = \vec{r}_n \cdot \vec{n}_i$, de projectie van $\vec{r}_n$ op de i -de basisvector $\vec{n}_i$ van het assenkruis.

We schrijven:

$$I_{ij} = \sum_n m_n [(\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j) \vec{r}_n^2 - (\vec{n}_i \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}_j \cdot \vec{r}_n)]$$

Deze uitdrukking maakt het mogelijk om de componenten van I te herschrijven in een ander assenkruis met behulp van vectorprojecties.

$$I'_{i'j'} = \sum_n m_n [(\vec{n}'_{i'} \cdot \vec{n}'_{j'}) \vec{r}_n^2 - (\vec{n}'_{i'} \cdot \vec{r}_n)(\vec{n}'_{j'} \cdot \vec{r}_n)]$$

waarbij $\vec{n}'_{i'}$ de i' -de eenheidsvector is van het nieuwe assenstelsel.

De nieuwe basisvectoren worden bekomen door rotatie van de oude:

$$\begin{aligned} \vec{n}'_{i'} &= \sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \\ \vec{n}'_{j'} &= \sum_j [O]_{j'j} \vec{n}_j \end{aligned}$$

met $[O]_{i'i} = \vec{n}'_{i'} \cdot \vec{n}_i$ de elementen van de rotatiematrix.

We voeren deze relatie in in de formule voor $I'_{i'j'}$:

$$I'_{i'j'} = \sum_n m_n \left[\left(\sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \cdot \sum_j [O]_{j'j} \vec{n}_j \right) \vec{r}_n^2 - \left(\sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \cdot \vec{r}_n \right) \left(\sum_j [O]_{j'j} \vec{n}_j \cdot \vec{r}_n \right) \right]$$

Werk beide termen uit.

Eerste term:

$$\left(\sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \cdot \sum_j [O]_{j'j} \vec{n}_j \right) \vec{r}_n^2 = \sum_{i,j} [O]_{i'i} [O]_{j'j} (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j) \vec{r}_n^2 = \sum_i [O]_{i'i} [O]_{j'j} \vec{r}_n^2 \quad (1)$$

omdat $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \delta_{ij}$.

Tweede term:

$$\left(\sum_i [O]_{i'i} \vec{n}_i \cdot \vec{r}_n \right) \left(\sum_j [O]_{j'j} \vec{n}_j \cdot \vec{r}_n \right) = \sum_{i,j} [O]_{i'i} [O]_{j'j} x_{ni} x_{nj} \quad (2)$$

We combineren beide termen:

$$I'_{i'j'} = \sum_n m_n \sum_{i,j} [O]_{i'i} [O]_{j'j} (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj})$$

Omdat:

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} \vec{r}_n^2 - x_{ni} x_{nj})$$

volgt:

$$I'_{i'j'} = \sum_{i,j} [O]_{i'i} [O]_{j'j} I_{ij}$$

De componenten van de traagheidstensor transformeren volgens:

$$[I'] = [O][I][O]^T$$

6 Oscillaties

6.1.1 Normaaltrillingsvergelijking

Leid de normaaltrillingsvergelijking af voor een conservatief systeem met holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen (beschreven door een Lagrangiaan met n veralgemeende coördinaten), voor kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwichtspunt.

Een systeem bevindt zich in een evenwichtspunt $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ als alle veralgemeende krachten nul zijn:

$$Q_k = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q^0} = 0$$

Bij een stabiel evenwicht is de potentiële energie minimaal in dat punt, en dus kan het systeem daar oscillaties vertonen. We bestuderen kleine uitwijkingen:

$$\eta_k = q_k - q_k^0$$

We beschouwen η_k als nieuwe veralgemeende coördinaten. Dit betekent dat we het gedrag van het systeem in de buurt van het evenwicht bestuderen door de afwijking ten opzichte van het evenwicht te beschouwen.

We ontwikkelen $V(q_1, \dots, q_n)$ in een Taylorreeks rond het evenwichtspunt:

$$V(q) = V_0 + \sum_k \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q^0} \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k\ell} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_{q^0} \eta_k \eta_\ell + \mathcal{O}(\eta^3)$$

De lineaire term verdwijnt wegens het evenwicht (alle gradiënten zijn nul in het minimum), en V_0 kan worden weggelaten omdat de energie slechts tot op een constante gedefinieerd is:

$$V(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{k\ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell \quad \text{met} \quad V_{k\ell} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_{q^0} = V_{\ell k}$$

De matrix $[V] = (V_{k\ell})$ is reëel en symmetrisch. Dit komt doordat gemengde tweede afgeleiden verwisselbaar zijn bij voldoende gladheid van V .

De kinetische energie heeft de algemene vorm:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k\ell} m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell$$

We zetten $q_k = q_k^0 + \eta_k \Rightarrow \dot{q}_k = \dot{\eta}_k$, en ontwikkelen:

$$m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(q^0) + \sum_m \left. \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_m} \right|_{q^0} \eta_m + \dots$$

Omdat η_k klein zijn, zijn ook $\dot{\eta}_k$ klein. Daarom behouden we enkel de eerste (constante) term in de ontwikkeling:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k\ell} T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell \quad \text{met} \quad T_{k\ell} = m_{k\ell}(q^0) = T_{\ell k}$$

Ook de matrix $[T] = (T_{k\ell})$ is reëel en symmetrisch. Dit weerspiegelt de fysische eigenschap dat massa- en koppelingseigenschappen in een mechanisch systeem onderling symmetrisch zijn.

De Lagrangiaan wordt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k\ell} T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell - \frac{1}{2} \sum_{k\ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell$$

De Lagrangevergelijkingen stelt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$$

Rekenregels toegepast op deze uitdrukkingen geven:

$$\sum_{\ell} T_{k\ell} \ddot{\eta}_{\ell} + \sum_{\ell} V_{k\ell} \eta_{\ell} = 0$$

Dit is een systeem van gekoppelde tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen in de uitwijkingen η_k .

Stel een oplossing voor van de vorm:

$$\eta_k(t) = C a_k e^{-i\omega t}$$

met:

- $C \in \mathbb{C}$: een schaalfactor
- $a_k \in \mathbb{C}$: relatieve amplitude van coördinaat k , bepaalt de vorm van de normaalmodus
- $\omega \in \mathbb{R}^+$: frequentie van trilling
- $e^{-i\omega t}$: complexe harmonische tijdsafhankelijkheid die het oscillerend gedrag bepaald

Afgeleiden:

$$\ddot{\eta}_{\ell}(t) = -\omega^2 C a_{\ell} e^{-i\omega t}$$

We vervangen in:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} T_{k\ell} \ddot{\eta}_{\ell} + \sum_{\ell} V_{k\ell} \eta_{\ell} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{\ell} T_{k\ell} (-\omega^2 C a_{\ell} e^{-i\omega t}) + \sum_{\ell} V_{k\ell} (C a_{\ell} e^{-i\omega t}) &= 0 \end{aligned}$$

We trekken $C e^{-i\omega t}$ buiten haakjes:

$$\Rightarrow C e^{-i\omega t} \sum_{\ell} (V_{k\ell} - \omega^2 T_{k\ell}) a_{\ell} = 0$$

Omdat $C e^{-i\omega t} \neq 0$, moet gelden:

$$\sum_{\ell} (V_{k\ell} - \omega^2 T_{k\ell}) a_{\ell} = 0$$

We herschrijven dit stelsel in matrixvorm:

$$([V] - \omega^2 [T]) \vec{a} = \vec{0}$$

Dit is een typisch veralgemeend eigenwaardeprobleem. Om een niet-triviale oplossing $\vec{a} \neq \vec{0}$ te hebben, moet gelden:

$$\det([V] - \omega^2 [T]) = 0$$

We definiëren:

$$\lambda := \omega^2$$

En bekomen de normaaltrillingsvergelijking:

$$[V] \vec{a} = \lambda [T] \vec{a}$$

Elke $n \times n$ reël-symmetrische matrix heeft n reële eigenwaarden.

De oplossingen $\lambda = \omega^2$ zijn de kwadraten van de normaalfrequenties, en de bijhorende vectoren $\vec{a}$ beschrijven de trillingsmodi van het systeem. Elke mode stelt een collectieve beweging van het systeem voor waarbij alle coördinaten harmonisch bewegen met dezelfde frequentie en vaste verhoudingen tussen amplitudes.

6.1.2 Normaaltrillingen oplossingen

Onderstel de Hessiaan positief-semidefiniet en de massamatrix positief-definiet. Toon aan dat er altijd n oplossingen (normaaltrillingen) zijn, door de normaaltrillingsvergelijking om te vormen tot een gewoon eigenwaardeprobleem voor een symmetrische matrix.

De matrix $[T]$ is de massamatrix (of kinetische matrix), symmetrisch en positief-definiet:

$$\forall [a] \neq 0 : \quad [a]^T [T] [a] > 0$$

De matrix $[V]$ is de Hessiaan van de potentiaalfunctie in een stationair punt. Ze is symmetrisch en positief-semidefiniet:

$$[a]^T [V] [a] \geq 0$$

De normaaltrillingsvergelijking is een veralgemeend eigenwaardeprobleem:

$$[V][a] = \lambda [T][a]$$

We willen dit probleem omvormen naar een standaard eigenwaardeprobleem van de vorm:

$$[V'] [e'_\nu] = \lambda [e'_\nu]$$

Aangezien $[T]$ symmetrisch en positief-definiet is, bestaat er een orthogonale matrix $[O]$ die $[T]$ diagonaliseert:

$$[T] = [O][\lambda][O]^T$$

waarbij $[\lambda]$ een diagonaalmatrix is met strikt positieve eigenwaarden λ_ν .

We kunnen nu de vierkantswortel van $[T]$ definiëren als:

$$[T]^{1/2} = [O][\sqrt{\lambda}][O]^T, \quad [T]^{-1/2} = [O][1/\sqrt{\lambda}][O]^T$$

Merk op dat:

$$[T]^{1/2} [T]^{1/2} = [O][\sqrt{\lambda}][O]^T [O][\sqrt{\lambda}][O]^T = [O][\lambda][O]^T = [T]$$

en dat:

$$[T]^{-1/2} [T]^{1/2} = [O][1/\sqrt{\lambda}][O]^T [O][\sqrt{\lambda}][O]^T = [O][1][O]^T = [1]$$

In plaats van rechtstreeks substituties toe te passen, werken we het eigenwaardeprobleem eerst uit:

$$\begin{aligned} [V][e_\nu] &= \lambda [T][e_\nu] \\ [V][1][e_\nu] &= \lambda [T]^{1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] \\ [V][T]^{-1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] &= \lambda [T]^{1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] \\ [T]^{-1/2} [V][T]^{-1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] &= \lambda [T]^{-1/2} [T]^{1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] \\ [T]^{-1/2} [V][T]^{-1/2} [T]^{1/2} [e_\nu] &= \lambda [1][T]^{1/2} [e_\nu] \end{aligned}$$

Noem nu:

$$[e'_\nu] = [T]^{1/2} [e_\nu], \quad [V'] = [T]^{-1/2} [V] [T]^{-1/2}$$

Dan wordt de vergelijking:

$$[V'] [e'_\nu] = \lambda [e'_\nu]$$

De matrix $[V'] = [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}$ is symmetrisch:

$$[V']^T = ([T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2})^T = [T]^{-1/2}[V]^T[T]^{-1/2} = [V']$$

Aangezien $[V]$ positief-semidefiniet is en $[T]^{-1/2}$ bestaat, is $[V']$ ook positief-semidefiniet. Dit impliceert dat alle eigenwaarden λ reëel zijn en $\lambda \geq 0$. Er bestaan n lineair onafhankelijke eigenvectoren $[e'_\nu]$ die orthonormaal gekozen kunnen worden, die een orthonormale basis vormen voor het eigenwaardenprobleem. Er bestaan dus n reële eigenwaarden waarvoor:

$$[e'_\nu]^T [e'_\mu] = \delta_{\mu\nu}$$

De gevonden eigenvectoren kunnen nu worden omgevormd:

$$[e_\nu] = [T]^{-1/2} [e'_\nu]$$

Elke eigenvector $[e'_\nu]$ van het standaardprobleem leidt tot een eigenvector $[e_\nu]$ van het oorspronkelijke probleem. Dit betekent:

$$[V][e_\nu] = \lambda [T][e_\nu]$$

Voor de eigenvectoren $[e_\nu]$ geldt:

$$[e'_\nu]^T [T][e'_\mu] = \delta_{\mu\nu}$$

Het belang van de orthonormaliteit is belangrijk om te garanderen dat het gaat om n onafhankelijke eigenvectoren met corresponderende eigenwaarde.

Vanuit het positief semi-definiet karakter van $[V]$ volgt dan ook uit $[V'][e'_\nu] = \lambda [e'_\nu]$ dat:

$$[e'_\nu]^T [V][e'_\nu] = \lambda_\nu = [e_\nu]^T [T]^{-\frac{1}{2}} [V'] [T]^{\frac{1}{2}} [e_\nu] = [e_\nu]^T [V][e_\nu] \geq 0$$

De eigenwaarden zijn allen positief. We verkrijgen dus n oplossingen $([e_\nu], \lambda)$, met $\lambda = \omega^2 \geq 0$, zodat we de frequenties ω_ν van de normaaltrillingen van het systeem gekend zijn.

Door het veralgemeend eigenwaardeprobleem $[V][e_\nu] = \lambda [T][e_\nu]$ om te vormen tot een gewoon eigenwaardeprobleem voor de symmetrische matrix $[V'] = [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}$, tonen we aan dat het systeem steeds n oplossingen bezit met reële, niet-negatieve λ , mits $[V]$ positief-semidefiniet en $[T]$ positief-definiet zijn.

8 Bewegingsvergelijkingen van Hamilton

8.1.1 Canonische vergelijkingen van Hamilton

Leid de canonische vergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$.

De Lagrangiaan is een functie van de veralgemeende coördinaten q_k , veralgemeende snelheden $\dot{q}_k$, en eventueel de tijd t :

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

De Lagrangevergelijkingen luiden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Dit is een stelsel van n tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de $q_k(t)$.

Dit probleem is eenvoudiger aan te pakken aan de hand van $2n$ eerste-orde differentiaalvergelijkingen, met als onbekende functies de n veralgemeende coördinaten $q_k(t)$ en de n toegevoegde momenten $p_k(t)$, met:

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

en definiëren de Hamiltoniaan als:

$$H \equiv H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Hierbij wordt aangenomen dat men de snelheden $\dot{q}_k$ kan uitdrukken in functie van q_k , p_k en t , via de definitie van p_k .

Bereken de totale differentiaal dh op twee manieren:

1. Linkerkant (als functie van q_k, p_k, t):

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

2. Rechterkant (via de definitie van h):

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Gebruik dat $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow$ de termen in $d\dot{q}_k$ vallen weg:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Door beide uitdrukkingen van dH te vergelijken, volgen de partiële afgeleiden van H :

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad \text{en} \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = -\dot{p}_k$$

Hieruit volgen de canonische vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(q_k, p_k, t) \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q_k, p_k, t) \end{aligned}$$

Dit is een stelsel van $2n$ eerste-orde differentiaalvergelijkingen in de onbekenden $q_k(t)$ en $p_k(t)$.

De eerste vergelijking beschrijft de evolutie van de coördinaten q_k in de tijd. De tweede geeft de evolutie van de impulsen p_k in functie van de afgeleide van de Hamiltoniaan naar de coördinaten.

Deze formulering is volledig equivalent met de Lagrangevergelijkingen, maar is vaak krachtiger in systemen met symmetrieën, bij quantisatie (in de overgang naar kwantummechanica) of bij het formuleren van integralen van de beweging.

8.1.2 Hamiltoniaan matrixnotatie

Geef een expliciete constructie van de Hamiltoniaan in matrixnotatie, voor het generieke geval van een systeem met conservatieve krachten en een kinetische energie die een homogene kwadratische vorm is in de veralgemeende snelheden.

Beschouw een systeem met n vrijheidsgraden, waarin we kiezen voor veralgemeende coördinaten $[q]$ en snelheden $[\dot{q}]$ die tijdsafhankelijk zijn. De kinetische energie T wordt voorgesteld als een kwadratische vorm:

$$T = \sum_{k,l} \frac{1}{2} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m(q)] [\dot{q}]$$

Hierbij is $[m(q)]$ de massa-matrix, symmetrisch, positief-definiet en kan afhangen van de coördinaten q_k .

De potentiële energie $V = V(q)$ hangt alleen af van q . De Lagrangiaan is dan:

$$L = T - V = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m(q)] [\dot{q}] - V(q)$$

De canoniek toegevoegde momenten zijn gedefinieerd als:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_l m_{kl}(q) \dot{q}_l \implies [p] = [m(q)] [\dot{q}]$$

De Hamiltoniaan wordt gedefinieerd via:

$$[H] = [p]^T [\dot{q}] - L = [p]^T [\dot{q}] - (T - V(q))$$

Substitutie van de uitdrukking voor T levert:

$$[H] = [p]^T [\dot{q}] - \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m(q)] [\dot{q}] + V(q)$$

Uit het toegevoegd moment volgt:

$$[\dot{q}] = [m(q)]^{-1} [p] \quad \text{en} \quad [\dot{q}]^T = [p]^T [m(q)]^{-1}$$

Substitueer dit in de Hamiltoniaan:

$$\begin{aligned} [H] &= [p]^T [m(q)]^{-1} [p] - \frac{1}{2} [p]^T [m(q)]^{-1} [p] + V(q) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) [p]^T [m(q)]^{-1} [p] + V(q) \end{aligned}$$

De Hamiltoniaan in matrixnotatie is dus:

$$[H] = \frac{1}{2} [p]^T [m(q)]^{-1} [p] + V(q)$$

Deze vorm is bijzonder geschikt voor numerieke toepassingen en theoretische analyse van systemen met meerdere vrijheidsgraden, zoals bij kleine oscillaties of koppelingen in algemene coördinaten.