Oefeningen WAI Dag na doop Rationale functies

Type I:

Gegeven: een rationale functie R in x waarin er zich een n-de machtswortel bevindt.

$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{c+dx}}\right) dx$ → substitutie naar t, met $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{c+dx}}$.

Type II:

Gegeven: een rationale functie R in functie van x waarin zich een e^{ax}bevindt.

$\int R(x, e^{ax}) dx$ → substitutie met t = e^{ax}.

Type III:

Gegeven: een rationale functie R in functie van sin x met een cos x.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ → substitutie met t = $\tan\frac{x}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \rightarrow x = 2\, arctg\, t \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Bijgevolg wordt de integraal $\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt$ wederom een rationale integraal.

Type IV:

Gegeven: een rationale functie R, met veranderlijke x, waarin een wortel van een kwadratische veelterm voorkomt.

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ met $a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$ax^2 + bx + c = a(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2})$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Subsitutie: $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ → Er zijn 4 mogelijke gevallen.

Geval I:

$\Delta > 0\ en\ a > 0$

$t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right) \rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}}dt$

De integraal wordt nu: $I = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 + \frac{\Delta}{4a}}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}dt$

$A = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}} \rightarrow$ nieuwe substitutie: $u = A \cosh a$

$I = \int R_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)dt$

$= \int R_1(A \cosh u\,, A \sinh u)\, A \sinh u\,.\,du$

$= \int R_2(e^u)\, du \rightarrow$ dus een integraal van het type II

Geval II:

$\Delta > 0\ en\ a < 0$

$t = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

$I = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{-t^2 - \frac{\Delta}{4a}}\right)\frac{1}{-\sqrt{a}}dt$

$A = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}$

Nieuwe substitutie: $t = A \sin u$

$I = \int R_1\left(t, \sqrt{A^2 - t^2}\right)dt = \int R_1(Asin\ u, A\ cosu)Acos\ u\ du \rightarrow$ Type 3

Geval III:

$\Delta < 0\ en\ a > 0$

$t = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) \rightarrow x = \frac{t}{\sqrt{a}} + \frac{b}{2a}$

$I = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a}}\right)\frac{1}{-\sqrt{a}}dt$

$A = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}$

Nieuwe substitutie: $t = a \sinh u$

$I = \int R_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)dt = \int R_1(A\ sinh\ u, A \cosh u)A\ cosh\ u\ du$

$= \int R_2(e^u)du \rightarrow$ Type 2