DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

1. Homogene differentiaalvergelijking met constante coëfficienten

Stelling 1.1. *Zij $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$. De volledige oplossingsruimte van $ay'' + by' + cy = 0$ is $\langle e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}, e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x} \rangle$.*

Stelling 1.2. *Zij $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $b^2 - 4ac = 0$. De volledige oplossingsruimte van $ay'' + by' + cy = 0$ is $\langle e^{\frac{-b}{2a}x}, xe^{\frac{-b}{2a}x} \rangle$.*

2. Particuliere oplossing van een differentiaalvergelijking

Definitie 2.1. *Zij $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Als de oplossingsruimte van $ay'' + by' + cy = 0$ gelijk is aan $\langle y_1, y_2 \rangle$, dan is de Wronskiaanse determinant $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$.*

Stelling 2.1. *Zij $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Als de oplossingsruimte van $y'' + ay' + by = 0$ gelijk is aan $\langle y_1, y_2 \rangle$, dan is $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -y_1 \int \frac{y_2 R}{W} + y_2 \int \frac{y_1 R}{W}$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = R$ met $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

3. Volledige oplossing van een differentiaalvergelijking

Stelling 3.1. *Zij $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Als de oplossingsruimte van $y'' + ay' + by = 0$ gelijk is aan $\langle y_1, y_2 \rangle$ en u een particuliere oplossing is van $y'' + ay' + by = R$, dan is de volledige oplossingsruimte van $y'' + ay' + by = R$ gelijk aan $u + \langle y_1, y_2 \rangle$.*

4. Voorbeelden

Voorbeeld 4.1. $y'' - y = e^{2x}$

Oplossing. $a = 1, b = 0, c = -1$. *Aangezien $b^2 - 4ac = 4 \neq 0$ is de oplossingsruimte van de homogene vergelijking volgens stelling 1.1 gelijk aan $\langle e^x, e^{-x} \rangle$. De Wronskiaanse determinant is $W = e^x \cdot (-e^{-x}) - e^x \cdot e^{-x} = -2$ en dus berekenen we een particuliere oplossing van de oorspronkelijke vergelijking als volgt:*

$$\begin{aligned} u &= -e^x \int \frac{e^{-x} e^{2x} dx}{-2} + e^{-x} \int \frac{e^x e^{2x} dx}{-2} \\ &= \frac{e^x \cdot e^x}{2} - \frac{e^{-x} \cdot e^3 x}{6} \\ &= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{6} = \frac{e^{2x}}{3}. \end{aligned}$$

De volledige oplossingsruimte is dus $\frac{e^{2x}}{3} + \langle e^x, e^{-x}\rangle$.

Voorbeeld 4.2. $y'' + y = \tan x$.

Oplossing. *De oplossingsruimte van de homogene vergelijking is duidelijk* $\langle e^{ix}, e^{-ix}\rangle$*, maar die is gelijk aan* $\langle \sin x, \cos x\rangle$*. Dus is de Wronskiaanse determinant* $W = -1$*. Een particuliere oplossing wordt berekend als volgt:*

$$\begin{aligned}
u &= \sin x \int \tan x \cos x dx - \cos x \int \tan x \sin x dx \\
&= -\sin x \cos x - \cos x \int \left(\frac{1}{\cos x^2} - \cos x\right) dx \\
&= -\sin x \cos x - \cos x (\log \tan x + \sec x - \sin x) \\
&= -\cos x \log \tan x + \sec x.
\end{aligned}$$

De volledige oplossingsruimte is dus $-\cos x \log \tan x + \sec x + \langle \sin x, \cos x\rangle$.

Geschreven door Nathan Steyaert, dank aan Manon Everaert en Thibaud Van Den Hoove voor het nalezen.