1. Toon aan (en vul aan). Formuleer (zonder bewijs) de hulpstellingen die je in je bewijs gebruikt.

   Stelling. *Zij $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ een* `[vul aan]`. *Zij f een continue afbeelding $\Omega \to \mathbb{C}$. Dan zijn equivalent:*

   (a) f *is holomorf in* Ω

   (b) $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ *voor elke gesloten contour* $\Gamma \subseteq \Omega$

   (b') $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ *voor elke gesloten gebroken lijn* $\Gamma \subseteq \Omega$

   (c) $\int_\Gamma f(z)\,dz$ *is onafhankelijk van de contour* $\Gamma \subseteq \Omega$ *met gegeven begin- en eindpunt*

   (c') $\int_\Gamma f(z)\,dz$ *is onafhankelijk van de gebroken lijn* $\Gamma \subseteq \Omega$ *met gegeven begin- en eindpunt*

   (d) f *heeft een primitieve op* Ω, *d.w.z.: er bestaat een holomorfe afbeelding* $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *met* $F'(z) = f(z)$ *voor elke* $z \in \Omega$.

2. Formuleer (=geef de opgave van) en toon aan:
   de ongelijkheid van Schwarz (ongelijkheid i.v.m. begrensde holomorfe functies op een schijf).
   Het tweede luik van de stelling die het geval behandelt waarin de ongelijkheid een gelijkheid is, hoeft niet behandeld te worden.

3. Beantwoord de vragen:

   Stelling. *Als z_0 een geïsoleerd singulier punt is voor f en*

   $$\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

   dan is f ophefbaar singulier in z_0.

   Bewijs. We behandelen eerst het geval $z_0 = 0$. We nemen dus aan dat $zf(z) \to 0$ als $z \to 0$. Omdat het holomorf deel A van f in het punt 0 holomorf is, is $zA(z) \to 0$, zodat voor het singulier deel B ook $zB(z) \to 0$ als $z \to 0$ `[1]`. Daardoor is

   $$g(z) := B(1/z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$$

   een gehele functie `[2]` waarvoor $|g(z)| \leqslant |z|$ zodra $|z|$ voldoende groot is `[3]`. Wegens ... `[4]` is dus $g(z) = a_{-1}z$. Omdat $\lim_{z\to\infty} g(z)/z = 0$ is $B = 0$.

   Zij nu z_0 willekeurig. ... □

   `[1-3]` Verklaar.
   `[4]` Formuleer (=geef de opgave van) de stelling die hier toegepast wordt.

4. Beantwoord de vragen:

   Stelling (Mittag-Leffler). *Gegeven een rij $(z_n)_n$ van verschillende complexe getallen met $|z_n| \to +\infty$ als $n \to +\infty$ en een rij van singuliere delen*

   $$B_n(z) := \frac{b_{1,n}}{z - z_n} + \cdots + \frac{b_{N_n,n}}{(z - z_n)^{N_n}},$$

   dan bestaat een meromorfe functie op heel $\mathbb{C}$ die enkel polen heeft in z_n en waarvan $B_n(z)$ het singulier deel is van de Laurent-ontwikkeling in z_n (voor elke $n \in \mathbb{N}$).

   Bewijs. De Taylor-ontwikkeling van $B_n(z)$ rond 0 convergeert in heel $B(0, |z_n|)$. `[1]` Ze convergeert dus ook gelijkmatig op $B(0, |z_n|/2)$. Dan bestaat dus een Taylor-veelterm P_n van B_n rond 0 waarvoor

   $$|B_n(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \forall z \in B\Big(0, \frac{|z_n|}{2}\Big)$$

   (als $z_n = 0$, kies dan $P_n := 0$). We tonen nu aan dat $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (B_n(z) - P_n(z))$ convergeert. Kies $M \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is

   $$\sum_{n:|z_n|\geqslant 2M} (B_n(z) - P_n(z))$$

gelijkmatig convergent op $B(0, M)$. [2] Wegens ... [3] is de som dus holomorf op $B(0, M)$. We vinden f door hierbij de overige termen (met $|z_n| < 2M$, eindig in aantal, want $|z_n| \to +\infty$) op te tellen. Ook f is dus holomorf op $B(0, M) \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Kies nu $n_0 \in \mathbb{N}$. Dan is

$$f(z) = B_{n_0}(z) - P_{n_0}(z) + \sum_{n \neq n_0} \big(B_n(z) - P_n(z)\big),$$

zodat het singulier deel van de Laurent-ontwikkeling van f in z_{n_0} juist $B_{n_0}(z)$ is. [4] $\square$

[1] Verklaar.
[2] Welke stelling wordt hier toegepast? Ga na dat de voorwaarden om haar toe hier te passen vervuld zijn.
[3] Welke stelling wordt hier toegepast? (Naam of formulering van de stelling volstaat hier.)
[4] Verklaar.

5. Is de afbeelding $f(z) = z^2$ hoekgetrouw in (delen van) het complexe vlak? Waarom (niet)?

6. Gegeven is een holomorfe afbeelding $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met de eigenschap dat $f'(z) \geqslant 0$ op heel $\mathbb{C}$. Kan je dan besluiten dat

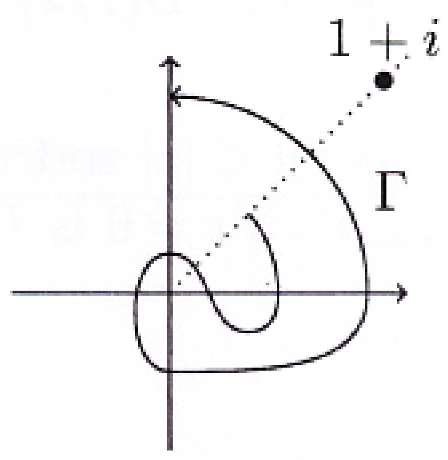
   (a) f stijgend is?

   (b) f een veelterm is?

   (c) f constant is?

   Verklaar je antwoord.

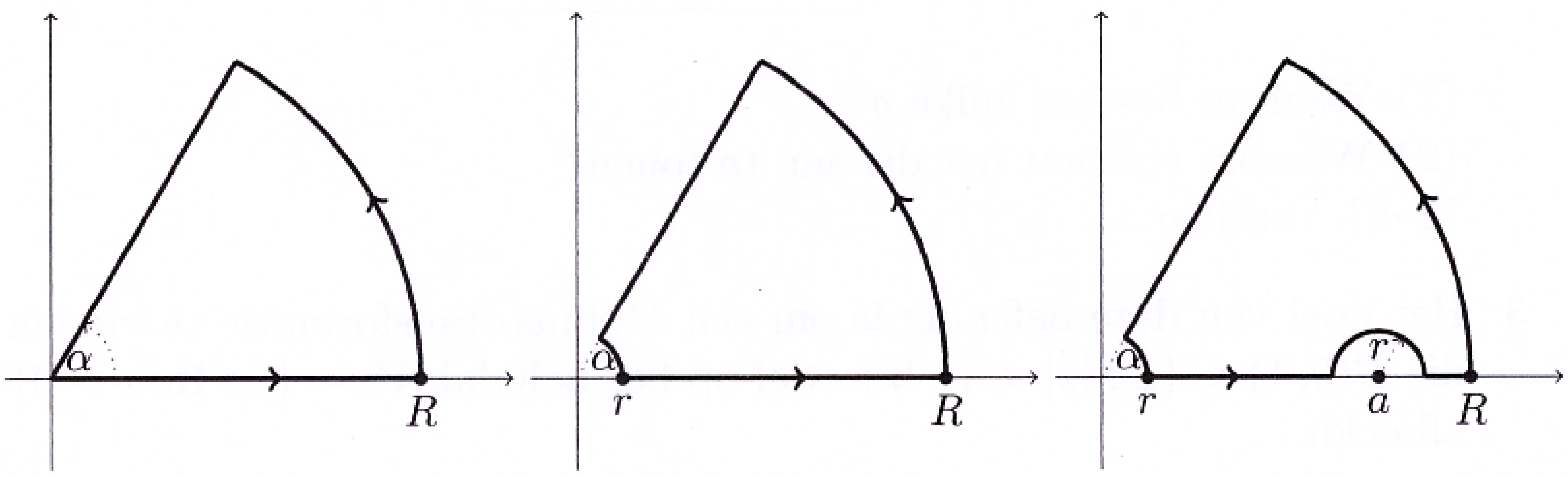
7. Bepaal de totale hoek $\operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{dz}{z}$ van de contour Γ op de figuur (de pijl geeft de doorloopszin aan):



1. Zij $\lambda > 0$. Bereken de integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin \lambda x}{(x^2+1)^2} dx,$$

door een gepaste functie langs een contour Γ zoals in figuur I te integreren. ($\alpha = \pi$)



Figuur I

2. Verklaar of weerleg de stappen in de volgende redenering:

Stelling 1 *Als $(z_n)_n$ een rij van verschillende complexe getallen is met $|z_n| \to +\infty$ als $n \to +\infty$ en $(m_n)_n$ een rij van natuurlijke getallen, dan bestaat een gehele functie $f(z)$ die in elke z_n een nulpunt heeft met multipliciteit m_n, en geen andere nulpunten.*

Bewijs. (1) Kies een functie $g(z)$ die holomorf is in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ waarvan het singulier deel in z_n juist $\frac{m_n}{z-z_n}$ is (voor elke n). [1]

Kies $a \in \Omega$ vast en definieer $f(z) := e^{\int_a^z g(\zeta)\, d\zeta}$ voor elke $z \in \Omega$, waarbij de integratie gebeurt over een willekeurige gebroken lijn $\Gamma \subseteq \Omega$ met beginpunt a en eindpunt z.

(2) We tonen aan dat $f(z)$ gedefinieerd is onafhankelijk van de gekozen gebroken lijn. Hiertoe volstaat het aan te tonen dat $e^{\int_\Gamma g(\zeta)\, d\zeta} = 1$ voor elke gesloten gebroken lijn $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. [2] Omdat Γ in een eindig aantal eenvoudige krommen opgesplitst kan worden, is $\int_\Gamma g(\zeta)\, d\zeta$ een geheel veelvoud van $2\pi i$ [3], zodat inderdaad $e^{\int_\Gamma g(\zeta)\, d\zeta} = 1$.

(3) Kies $z \in \Omega$ willekeurig. Dan bestaat een open gebied $\Omega' \subseteq \Omega$ zonder gaten dat a en z bevat, zodat $\int_a^z g(\zeta)\, d\zeta$ holomorf is in Ω' [4]. Daardoor is f holomorf in z met $f(z) \neq 0$.

(4) Kies n willekeurig. Omdat $g(z) = \frac{m_n}{z-z_n} + h(z)$ voor een zekere h die holomorf is in een omgeving van z_n, is

$$f(z) = e^{m_n \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta - z_n} + \int_a^z h(\zeta)\,d\zeta} \stackrel{\boxed{5}}{=} \frac{(z-z_n)^{m_n}}{(a-z_n)^{m_n}} e^{\int_a^z h(\zeta)\,d\zeta},$$

zodat f holomorf is in z_n en $\underline{\mathrm{mult}_{z=z_n} f(z) = m_n}$ [6]. $\square$

[1] Waarom bestaat zulke g?
[2] Waarom volstaat het dit aan te tonen?
[3-6] Verklaar.

3. Het doel van deze oefening is om een Möbius-transformatie te vinden die $B(0,1) = \{z : |z| < 1\}$ bijectief op het halfvlak $V := \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ afbeeldt.

   (a) Vind een Möbius-transformatie f waarvoor $f(1) = i$, $f(i) = 0$ en $f(-1) = -i$ en toon aan dat deze uniek is.
   (b) Toon aan dat f de eenheidscirkel op de imaginaire as afbeeldt.
   (c) Bewijs dat f de eenheidsschijf $B(0,1)$ bijectief op het halfvlak V afbeeldt. (HINT: Bekijk ook de inverse van f.)
   (d) Is een Möbius-transformatie die de eenheidsschijf $B(0,1)$ bijectief op het halfvlak V afbeeldt uniek? Motiveer je antwoord.

4. Zij f en g holomorf op een open gebied $\Omega \supset \overline{B(0,1)}$. Veronderstel dat de volgende twee eigenschappen gelden:

   - Er geldt dat $|f(z)| = |g(z)|$ voor alle z waarvoor $|z| = 1$,
   - Op de open schijf $B(0,1)$ is $z \in B(0,1)$ een nulpunt met multipliciteit m van f als en slechts als z een nulpunt met multipliciteit m is van g.

   Toon aan dat er een constante $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat waarvoor $|\lambda| = 1$ en $f(z) = \lambda g(z)$ voor alle $z \in \Omega$. (HINT: Veronderstel eerst dat f en g geen nulpunten hebben in $\overline{B(0,1)}$.)