Contourintegratie

Benjamin Huyghe

January 31, 2025

1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2-4x+5} dx$ (examen 2024-2025 eerste zit)

Bereken integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2-4x+5} dx$ door te integreren langs een contour zoals figuur I ($\alpha = \pi$).
Noem $f(x) = \frac{x \cos \pi x}{x^2-4x+5}$, we nemen haar complexe uitbreiding $g(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z^2-4z+5}$ zodat $\operatorname{Re} g(z) = f(x)$.
Wat zijn de singulariteiten van $g(z)$ in het binnengebied $[\Gamma]$? We zien in dat de teller geen singulariteiten bevat dus we onderzoeken enkel de nulpunten van de noemer. Volgens de discriminantmethode is

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Longrightarrow z = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Nu valt $2 - i$ onder de reële as en zal dus enkel singulariteit $z_1 = 2 + i$ in het binnengebied van onze contour liggen. Het punt z_1 ligt niet op de rand dus we kunnen de integraal over Γ berekenen via de Residustelling

$$\int_\Gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 - 4z + 5} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} g(z).$$

We zien eenvoudig in dat z_1 een eenvoudige pool van g is, we kunnen haar residu dus berekenen met behulp van de regel van de l'Hopital als

$$\operatorname{res}_{z=z_1} g(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{(z-2-i)ze^{i\pi z}}{(z-2-i)(z-2+i)} = \frac{(2+i)e^{2\pi i - \pi}}{2i}.$$

Hierdoor bekomen we dat

$$\int_\Gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 - 4z + 5} dz = 2\pi e^{-\pi} + \pi e^{-\pi} i.$$

We splitsen de contour Γ nu op in deelcontouren. Noem Γ_1 de reële as van $-R$ tot R, waarbij we R naar $+\infty$ zullen laten naderen. En noem Γ_2 de halve cirkel boven de reële as met straal R, doorlopen in tegenwijzerzin. We hoeven niet nog verder op te splitsen aangezien we geen singulariteiten op de contour hebben.

$$2\pi e^{-\pi} + \pi e^{-\pi} i = \int_\Gamma g(z)dz = \int_{\Gamma_1} g(z)dz + \int_{\Gamma_2} g(z)dz$$

Merk op dat de integraal over Γ_1 voor $R \to +\infty$ nadert naar de gevraagde integraal:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 - 4z + 5} dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2 - 4x + 5} dx \longrightarrow ⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Het reëel deel van deze integraal is juist de Cauchy-hoofdwaarde van de integraal die we zoeken. We bewijzen nu dat de integraal over Γ_2 naar 0 zal naderen.

$$\left| \int_{\Gamma_2} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 - 4z + 5} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{itR} e^{i\pi Re^{itR}}}{R^2 e^{2itR} - 4Re^{itR} + 5} Rie^{itR} dt \right|$$

$$= R \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i\pi R(\cos(Rt) + i\sin(Rt))}}{R^2 e^{2itR} - 4Re^{itR} + 5} dt \right| \le R \int_0^{\pi} \frac{e^{-\pi R \sin Rt}}{|R^2 e^{2itR} - 4Re^{itR} + 5|} dt$$

$$\le R\pi \max_{t \in [0,\pi]} \frac{e^{-\pi R \sin Rt}}{|R^2 e^{2itR} - 4Re^{itR} + 5|} = \frac{R\pi}{R^2} \longrightarrow 0.$$

Voor $R \longrightarrow +\infty$ krijgen we dus dat

$$\frac{(2+i)e^{2\pi i - \pi}}{2i} = ⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Zodat

$$⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 - 4x + 5} dx = \mathrm{Re}\left[2\pi e^{-\pi} + \pi e^{-\pi} i\right] = \frac{2\pi}{e^{\pi}}.$$

We berekenden nu dus de Cauchy-hoofdwaarde van de gezochte integraal. We mogen er voor dit vak vanuit gaan dat deze naar de gevraagde integraal convergeert en mogen gewoon schrijven dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 - 4x + 5} dx = \frac{2\pi}{e^{\pi}}.$$

We zullen in deze bundel hierdoor ook niet meer met de Cauchy-hoofdwaarde werken vanaf nu, we gaan er stilzwijgend vanuit dat ze steeds aan de gezochte integraal gelijk is.

2 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1}dx$ (cursus, oefening 2.5.13(9))

Noem $f(x) = \frac{xe^x}{e^{2x}-1}$. Merk op dat f even is zodat

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1}dx.$$

We berekenen de integraal via integratie langs contour Γ zoals Figuur II ($a = \pi$). De complexe uitbreiding van f is $g(z) = \frac{ze^z}{e^{2z}-1}$. De teller heeft geen singulariteiten dus we onderzoeken de nulpunten van de noemer. Nu is

$$e^{2z} = 1 \Leftrightarrow z = k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}).$$

De singulariteiten binnen $[\Gamma]$ zijn dus $z_1 = 0$ en $z_2 = \pi i$. We onderzoeken hun aard. Aangezien $e^{2z} - 1 = 2z + 2z^2 + \ldots$ is:

- $\text{mult}_{z=0}\, g(z) = \text{mult}_{z=0}\left[ze^z\right] - \text{mult}_{z=0}\left[e^{2z}-1\right] = 1 - 1 = 0$
- $\text{mult}_{z=\pi i}\, g(z) = \text{mult}_{z=\pi i}\left[ze^z\right] - \text{mult}_{z=\pi i}\left[e^{2z}-1\right] = 0 - 1 = -1$

Aangezien $z_1 = 0$ dus een ophefbare singulariteit is kunnen we gewoon doorintegreren zonder de contour verder op te splitsen. Voor de enkelvoudige pool $z_2 = \pi i$ tekenen we een half cirkeltje binnen de contour met straal ϵ. We zullen $\epsilon \longrightarrow 0+$ laten naderen, zodat we uiteindelijk wel mogen doorintegreren, maar zullen ook haar residubijdrage moeten berekenen via lemma 2.5.10 uit de cursus. We splitsen de contour Γ op in deelcontouren Γ_1: de reële as van $-R$ tot R, Γ_2: het lijnstuk van R tot $R+\pi i$, Γ_3: het lijnstuk van $R+\pi i$ tot $\epsilon+\pi i$, Γ_4: een half cirkeltje onder pool z_2 met straal ϵ in wijzerzin, Γ_5: het lijnstuk van $-\epsilon + \pi i$ tot $-R + \pi i$ en Γ_6: het lijnstuk van $-R + \pi i$ tot $-R$.
Volgens de Hoofdstelling van de complexe analyse is dan

$$0 = \int_{\Gamma_1} g(z)dz + \int_{\Gamma_2} g(z)dz + \int_{\Gamma_3} g(z)dz + \int_{\Gamma_4} g(z)dz + \int_{\Gamma_5} g(z)dz + \int_{\Gamma_6} g(z)dz.$$

Geheel analoog aan de vorige oefening zal voor $R \to +\infty$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{ze^z}{e^{2z}-1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^x}{e^{2x}-1}dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1}dx.$$

We bewijzen dat de de bijdrage van Γ_2 en Γ_6 naar nul nadert als $R \to +\infty$:

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{ze^z}{e^{2z}-1}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{(R+it)e^{R+it}}{e^{2R+2it}-1}idt\right|$$

$$\leq e^R \int_0^{\pi} \frac{|R+it|}{|e^{2R+2it}-1|}dt \leq e^R \pi \max_{t\in[0,\pi]} \frac{|R+it|}{|e^{2R+2it}-1|} \approx \pi \frac{e^R\sqrt{R^2+\pi^2}}{e^{2R}} \longrightarrow 0.$$

Het bewijs voor Γ_6 volgt geheel analoog.

Als we $\epsilon \to 0+$ laten naderen, kunnen we de integralen over Γ_3 en Γ_5 samen berekenen over het hele horizontale lijnstuk (we mogen wel niet vergeten om later de residubijdrage van de pool over Γ_4 te berekenen).

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left[\int_{\Gamma_3} g(z)dz + \int_{\Gamma_5} g(z)dz \right] = -\int_{-R}^{R} \frac{(x+\pi i)e^{x+\pi i}}{e^{2x+2\pi i}-1} dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{(x+\pi i)e^{x}}{e^{2x}-1} dx = \int_{\Gamma_1} \frac{xe^x}{e^{2x}-1} dx + \pi i \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = \int_{\Gamma_1} \frac{xe^x}{e^{2x}-1} dx$$

Ten slotte berekenen we dan de bijdrage van Γ_4 via lemma 2.5.10 als

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left[\int_{\Gamma_4} g(z)dz \right] = -\pi i \operatorname{res}_{z=\pi} g(z).$$

Via de regel van de l'Hopital berekenen we haar residu als

$$\operatorname{res}_{z=\pi} \left[\frac{ze^z}{e^{2z}-1} \right] = \lim_{z \to \pi i} \left[\frac{(z-\pi i)ze^z}{e^{2z}-1} \right] = \pi i e^{\pi i} \lim_{z \to \pi i} \left[\frac{1}{2e^{2z}} \right] = -\frac{\pi}{2} i.$$

Als we dit invullen krijgen we dat

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left[\int_{\Gamma_4} g(z)dz \right] = -\frac{\pi^2}{2}$$

Als we al onze resultaten samenvoegen krijgen we dus dat

$$0 = 2 \int_{\Gamma_1} g(z) - \frac{\pi^2}{2}$$

. Voor $R \to +\infty$ wordt dit

$$\frac{\pi^2}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1} dx \Longleftrightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}-1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$