

# Hoofdstuk 1

## Getallen tellen

### 1.1 Gehele getallen

#### 1.1.1 Inleiding

#### 1.1.2 De optelling en de vermeningvuldiging

#### 1.1.3 De ordening van de gehele getallen

#### 1.1.4 Het axioma van de goede ordening

### 1.2 Recursieve definities

### 1.3 Het inductieprincipe

**Extra Oefening 1** *Een palindromisch getal is een getal dat van achter naar voren gelezen hetzelfde getal oplevert (bvb. 1239321 en 2002 zijn palindromische getallen). Bewijs dat een palindromisch getal dat bestaat uit een even aantal cijfers steeds deelbaar is door 11.*

**Extra Oefening 2** Voor  $n \geq 1$ , zij

$$S_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2,$$

som van de kwadraten van de eerste  $n$  oneven getallen.

(a) Bewijs dat  $S_n = n(2n - 1)(2n + 1)/3$ .

(b) Bepaal het laatste cijfer van  $S_n$  met  $n$  een veelvoud van 5.

## 1.4 Het ladenprincipe van Dirichlet

**Extra Oefening 3** Hoeveel personen moet men minimaal samenbrengen om zeker te zijn dat er zich onder hen minstens twee personen bevinden die geboren zijn op dezelfde dag van de week en in dezelfde maand?

**Extra Oefening 4** Zij  $X = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  en stel dat  $D$  een deelverzameling is van  $X$  met  $n + 1$  elementen. Toon aan dat  $D$  twee getallen bevat zodanig dat het ene deelbaar is door het andere.

**Extra Oefening 5** Toon aan dat elke verzameling van drie verschillende positieve getallen twee elementen  $x$  en  $y$  bevat zodanig dat  $x^3y - xy^3$  deelbaar is door 10.

**Extra Oefening 6** Tien punten worden willekeurig gekozen binnen een gelijkzijdige driehoek. De lengte van 1 zijde bedraagt 3 eenheden. Toon aan dat er twee punten bestaan die op een afstand liggen van elkaar van minder dan één eenheid.

**Extra Oefening 7** Op een kermisrad staan de nummers 1, 2, ..., 36 in een willekeurige volgorde geschreven. Toon aan dat, wat die volgorde ook is, er steeds 3 opeenvolgende nummers op het rad gevonden kunnen worden met som groter dan 54.

**Extra Oefening 8** *In een maand bestaande uit 30 dagen speelt een team ten minste één wedstrijd per dag, maar niet meer dan 45 wedstrijden. Toon aan dat er een periode is bestaande uit een aantal opeenvolgende dagen waarin het team precies 14 wedstrijden speelt.*

**Extra Oefening 9** *Tijdens een voetbaltornooi van 15 dagen werden er 20 wedstrijden gespeeld. Elke dag werd er minstens 1 keer gespeeld. Toon aan dat er een periode van opeenvolgende dagen was waarin er precies 9 wedstrijden werden gespeeld.*

## 1.5 Eindige en oneindige verzamelingen

### 1.5.1 Definities

### 1.5.2 Opmerking

### 1.5.3 Kardinaalgetallen

## 1.6 Het vereenvoudigd somprincipe

## 1.7 Het produktprincipe

**Extra Oefening 10** *Een bedrijf dat steekproeven organiseert bezit een databank met gegevens van  $n$  personen. De databank bezit deelverzamelingen van grootte  $k$  ( $k < n$ ), blokken genoemd, zodat als  $t$  willekeurige personen genomen worden, er precies  $\lambda$  blokken zijn die deze  $t$  personen bevatten ( $t < k$ ). Zij  $t' < t$  en beschouw  $t'$  verschillende personen. Bewijs dat er precies*

$$\lambda \binom{v-t'}{t-t'} / \binom{k-t'}{t-t'}$$

*blokken zijn die deze  $t'$  personen bevatten.*

**Extra Oefening 11** *Veronderstel dat  $X$  een verzameling is met cardinaliteit  $n$  en dat  $\mathcal{U}$  de verzameling van deelverzamelingen van  $X$  met cardinaliteit  $d$  ( $d \leq n$ ) is. De elementen van  $\mathcal{U}$  zijn zodanig gekozen dat elke deelverzameling van kardinaliteit  $t$  ( $t$  een vast gekozen getal, waarvoor  $d \leq t \leq n$ ) precies 1 element van  $\mathcal{U}$  als deelverzameling bevat. Veronderstel nu dat  $S$  een deelverzameling is van  $X$  met  $|S| = i$ ,  $t \leq i \leq n$ . Bereken dan het aantal elementen van  $\mathcal{U}$  die bevat zijn in  $S$ .*

## 1.8 Het eenvoudig inclusie-exclusie principe

## 1.9 Kombinatorie

### 1.9.1 Variaties

### 1.9.2 Permutaties

### 1.9.3 Combinaties

### 1.9.4 Herhalingsvariaties

### 1.9.5 Herhalingscombinaties

**Extra Oefening 12** *De programmeertaal van Pastran aanvaardt variabelen van ten hoogste 6 karakters. Het eerste karakter moet een klinker zijn, terwijl elk ander eventueel karakter ofwel een klinker ofwel een oneven cijfer moet zijn. Hoeveel variabelen kunnen er in Pastran gebruikt worden?*

**Extra Oefening 13** (a) *Hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 100000 zijn er die bestaan uit verschillende cijfers?*

(b) *Hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 1000000 zijn er die het cijfer 9 bevatten en waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 13?*

**Extra Oefening 14** *Hoeveel natuurlijke getallen met hoogstens 4 cijfers bestaan er zodanig dat de cijfers van links naar rechts stijgen (strikt stijgen of gelijk blijven) met betrekking tot de natuurlijke orderrelatie?*

**Extra Oefening 15** (a) *Hoeveel woorden (zonder betekenis) van 26 letters kan men vormen als elke letter uit het alfabet tot 26 keer gebruikt mag worden?*

(b) *Als een letter uit het alfabet hoogstens 25 keer mag voorkomen, hoeveel woorden (zonder betekenis) met 26 letters kunnen er dan gevormd worden?*

**Extra Oefening 16** *Hoeveel permutaties van de 26 letters van het alfabet bevatten geen enkele van de drie woorden: hond, poes, muis?*

**Extra Oefening 17** *Bij het pokerspel krijgt iedere speler bij de aanvang van het spel vijf kaarten. Er wordt gespeeld met 52 kaarten en er zijn 13 soorten kaarten, namelijk de nummers 1 tot en met 10, boer, dame en heer, en binnen elke soort zijn er 4 kaarten, namelijk harten, klaveren, ruiten en schoppen.*

- (a) *Hoeveel mogelijke vijftallen kaarten kan een speler toebedeeld krijgen?*
- (b) *Op hoeveel manieren kan een speler elk van de volgende combinaties toebedeeld krijgen bij de aanvang van het spel:*
  - (b.1) *Four of a kind: vier van eenzelfde soort + een vijfde van een andere soort;*
  - (b.2) *Full house: drie van eenzelfde soort + twee van eenzelfde soort verschillend van de eerste soort;*
  - (b.3) *Three of a kind: drie van eenzelfde soort + vierde van een andere soort + vijfde van nog een andere soort;*
  - (b.4) *Two pair: twee van eenzelfde soort + twee van eenzelfde andere soort + vijfde van nog een andere soort;*
  - (b.5) *One pair: slechts twee van dezelfde soort, alle andere van verschillende soort niet gelijk aan de eerste soort.*

**Extra Oefening 18** *Hoeveel woorden (met of zonder betekenis) van 26 letters kan men vormen zodanig dat elke letter uit het alfabet een onbeperkt aantal keren mag voorkomen en zodanig dat de letters in het woord van links naar rechts alfabetisch zijn gerangschikt?*

**Extra Oefening 19** *Een boodschap die bestaat uit 12 verschillende symbolen moet worden doorgeseind. Naast de 12 symbolen, zal de transmittor 45 blanco ruimten tussen de symbolen doorzenden, met tussen elke 2 verschillende symbolen minstens 3 blanco ruimten. Op hoeveel manieren kan de boodschap doorgeseind worden?*

**Extra Oefening 20** *Je beschikt over een gewoon kaartspel van 52 kaarten. Je trekt hieruit 5 kaarten, de volgorde waarin is van geen belang.*

- (a) *Hoeveel mogelijke kaartenvijftallen zijn er die juist één paar gelijkwaardige kaarten bevatten, dus bijvoorbeeld twee Azen of twee drieën of twee Dames? (Let op: drie of vier gelijkwaardige kaarten of twee dergelijke paren worden uitgesloten.)*
- (b) *Hoeveel mogelijkheden zijn er die minstens één paar van dezelfde waarde bevatten? (Eén paar, twee paren, drie of vier kaarten van dezelfde soort zijn nu allemaal wel toegelaten.)*

**Extra Oefening 21** (a) *Op hoeveel manieren kan men 24 mensen aan 4 ronde tafels van 6 personen schikken. Twee plaatsingen aan eenzelfde tafel noemen we gelijk als er een rotatie bestaat die de ene plaatsing afbeeldt op de andere.*

- (b) *Veronderstel nu dat er twaalf mannen en twaalf vrouwen zijn. Hoeveel mogelijke schikkingen zijn er als we elke man tussen twee vrouwen willen zetten en omgekeerd?*

**Extra Oefening 22** Een groep van 24 personen gaat dineren aan een ronde tafel. Er kan gekozen worden tussen een vlees- en visgerecht. Om technische redenen wordt een visgerecht enkel klaargemaakt voor 2 personen die naast elkaar zitten. Stel er zijn 5 paren die het visgerecht nemen. Bereken het aantal manieren waarop de 24 personen het diner kunnen gebruiken. Tafelschikkingen die door rotatie uit elkaar ontstaan, worden als gelijk gesteld, maar tafelschikkingen waarbij tenminste één persoon iets anders bestelt, als verschillend.

**Extra Oefening 23** Hoeveel elementen van  $\mathbb{N}[1, 6000]$  zijn er waarin geen enkel cijfer herhaald wordt en alle cijfers even zijn?

**Extra Oefening 24** Een vrouw wil de kluis van haar man kraken, en er met het geld vandoor gaan vooraleer hij thuis komt. De code  $a_1a_2a_3a_4a_5$  bestaat uit 5 cijfers, allen bevat in  $\mathbb{N}[0, 9]$ , en ze weet dat het eerste en het laatste cijfer hun huisnummer vormt (huisnummer =  $a_1a_5$ ). Het drukken van een code  $x$  vraagt 2 seconden. Bovendien heeft de kluis  $s_x$  seconden nodig om te verifiëren of de code  $x$  correct is, waarbij  $s_x$  gelijk is aan het aantal verschillende cijfers optredend in  $x$ . In welk tijdsbestek kan de vrouw de klus klaren als je weet dat

(a) het eerste en het laatste cijfer gelijk zijn?

(b) het eerste en het laatste cijfer verschillend zijn?

**Extra Oefening 25** Hoeveel geordende 5-tallen  $(x_1, x_2, \dots, x_5)$  bestaande uit 5 oneven natuurlijke getallen  $x_1, x_2, \dots, x_5$  bestaan er waarvoor  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ ?

**Extra Oefening 26** Hoeveel oplossingen natuurlijke getallen  $(x_1, \dots, x_6)$  zijn er voor de vergelijking  $x_1 + \dots + x_6 = 31$  met  $x_1, \dots, x_4 \equiv 1 \pmod{3}$  en  $x_5 \equiv x_6 \equiv 0 \pmod{3}$ ?



## 1.10 Toepassing op de combinatieleer

1.10.1 De binomiale kansverdeling

1.10.2 Het aantal deelverzamelingen

1.10.3 Het Binomium van Newton

1.10.4 Het veralgemeend inclusie-exclusie principe

1.10.5 Permutaties zonder fixelementen: wanorde

## 1.11 Stirling getallen

## 1.12 Multinomiaalgetallen

**Extra Oefening 27** *Hoeveel woorden (zonder betekenis) kunnen er gevormd worden met al de letters uit het woord OPEENVOLGEND waarbij twee klinkers elkaar nooit mogen opvolgen?*

**Extra Oefening 28** *Beschouw het woord 'ONGEWOON'.*

(a) *Hoeveel verschillende woorden (eventueel zonder betekenis) kunnen worden gevormd als we alle letters gebruiken?*

(b) *Hoeveel van deze woorden hebben drie O's na elkaar?*

(c) *In hoeveel woorden staan nooit twee O's na elkaar?*

**Extra Oefening 29** *Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om de letters van het woord 'BINNENKORT' te rangschikken zodanig dat alle klinkers gegroepeerd blijven? Dezelfde vraag voor het woord 'TREINKAART'.*

**Extra Oefening 30** *Hoeveel woorden kunnen er gevormd worden met de letters uit TALLAHASSEE, zodat geen 2 letters A naast elkaar staan?*

# Hoofdstuk 2

## Voortbrengende functies

### 2.1 Formele machtreeksen

#### 2.1.1 Inleiding

#### 2.1.2 Som en product van machtreeksen

#### 2.1.3 Een andere kijk op het binomium van Newton

### 2.2 Gewone voortbrengende functies

#### 2.2.1 Definities

#### 2.2.2 De voortbrengende funktie voor de herhalingskombinaties

**Extra Oefening 31** *Gegeven zijn drie dozen die respectievelijk gevuld zijn met 6 rode, zes blauwe en zes gele ballen. Op hoeveel manieren kan men 11 ballen uit deze dozen nemen, als uit elke doos minstens 1 bal genomen moet worden?*

**Extra Oefening 32** *Op hoeveel verschillende manieren kan men 25 identieke ballen in 7 verschillende bakjes leggen, als er hoogstens 10 in het eerste bakje kunnen? Er is geen beperking op het aantal ballen in de overige 6 bakjes.*

**Extra Oefening 33** *Zoek het aantal manieren om een briefje van honderd Belgische franken te wisselen in (1BF, 5BF, 10BF, 20BF, 50BF) waarbij je hoogstens 10 1-frankstukken mag gebruiken.*

### 2.3 Exponentieel voortbrengende functies

**Extra Oefening 34** *Op hoeveel manieren kan men 7 verschillende knikkers verdelen over 5 bakjes, zodanig dat er in ieder bakje ten minste 1 knikker ligt?*

**Extra Oefening 35** (a) *Op hoeveel manieren kunnen we 19 identiek uitziende stoelen in vier verschillende kamers stoppen met in elke kamer minstens 1 stoel?*

(b) *Zelfde vraag maar nu voor 19 stoelen met verschillende kleur.*

**Extra Oefening 36** *Bepaal het aantal woorden van  $n$  letters die kunnen gevormd worden met behulp van de letters van het woord EURO zodanig dat er in elk woord er een oneven aantal E's voorkomen en een even aantal U's. Doe dit op twee manieren:*

(i) *combinatorisch;*

(ii) *met behulp van genererende functies.*

*[Hint: merk op dat volgorde van belang is.]*

**Extra Oefening 37** *Op hoeveel manieren kan men zes verschillende taken verdelen over 3 bedienden als de moeilijkste taak aan de meest ervaren en de gemakkelijkste taak aan de minst ervaren bediende gegeven wordt?*

## 2.4 De differentiaaloperator

## 2.5 Constructie van voortbrengende functies uit andere voortbrengende functies

**Extra Oefening 38** *Stel de voortbrengende functie op behorend bij de rij  $(2^{n-1}(2^n - 1))_n$ .*

**Extra Oefening 39** *Geef de voortbrengende functie voor de rij  $(\frac{3^{n+1}}{5}(4^n - 1))$ .*

**Extra Oefening 40** *Stel de voortbrengende functie op behorend bij de rij  $(2^{n-1}(1 + 2^{n-1}))_n$ .*

# Hoofdstuk 3

## Recurrente betrekkingen

### 3.1 Definitie

### 3.2 Lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten

#### 3.2.1 Definitie

#### 3.2.2 Homogene lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten

Homogene lineaire recurrente betrekkingen van eerste orde

$$a_n = ca_{n-1}$$

Is  $x$  oplossing van de karakteristieke vergelijking  $x - c = 0$ , dan is de algemene oplossing geven door

$$a_n = \alpha x^n.$$

### Homogene lineaire recurrenente betrekkingen van tweede orde

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Zijn  $x_1$  en  $x_2$  de oplossingen van de karakteristieke vergelijking  $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ , dan is de algemene oplossing gegeven door

$$a_n = \begin{cases} \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n & \text{als } x_1 \neq x_2 \\ \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 n x_1^n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) x_1^n & \text{als } x_1 = x_2 \end{cases}$$

### Homogene lineaire recurrenente betrekkingen van hogere orde

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

Zijn  $x_1, \dots, x_l$  de oplossingen van de karakteristieke vergelijking met respectievelijke multipliciteiten  $m_1, \dots, m_l$ , dan is de algemene oplossing gegeven door

$$a_n = \sum_{i=1}^l x_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} n^j.$$

**Extra Oefening 41** Laat  $a_n$  het aantal woorden zijn van  $n$  letters uit het alfabet  $\{x, y\}$ , die de lettercombinatie  $yy$  niet bevatten. Stel een recurrenente betrekking op van  $a_n$  en los ze op. Bepaal  $a_7$ .

**Extra Oefening 42** *In een programmeertaal worden enkel correcte wiskundige uitdrukkingen (zonder haakjes) aanvaard die gevormd worden met de cijfers  $1, \dots, 9$  en de binaire bewerkingssymbolen  $+, *, /, -$  (Bijvoorbeeld:  $1221, 3 + 4, 2 + 3 * 5, 23 * 59 + 1124$  zijn correcte wiskundige uitdrukkingen, maar  $+2, 8 + *9, 9 + 3-$  zijn dit niet).*

*Zij  $a_n$  het aantal correcte wiskundige uitdrukkingen van lengte  $n$ .*

(1) *Bewijs dat  $a_n$  voldoet aan de recurrente betrekking:*

$$a_n = 9a_{n-1} + 36a_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad a_1 = 9, a_2 = 81;$$

(2) *Los deze recurrente betrekking op;*

(3) *Geef de voortbrengende functie voor  $a_n$ .*

**Extra Oefening 43** *Onderstel dat een codetaal enkel gebruik maakt van de strings ‘a’, ‘ab’ en ‘bc’ die in willekeurige volgorde na elkaar kunnen worden geplaatst. Stel de recurrente betrekking op die voor elk natuurlijk getal  $n$  het aantal mogelijke codewoorden geeft van lengte  $n$  (dus: noem  $a_n$  het aantal codewoorden van lengte  $n$ ). Los de recurrente betrekking op.*

**De matrixmethode voor homogene lineaire betrekkingen van hogere orde**

### 3.2.3 Niet-homogene lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

De oplossing van deze recurrente betrekking is volledig bepaald door een particuliere oplossing en de oplossing van het homogene gedeelte.

Indien  $f(n)$  veelterm is van graad  $l$ , dan is een particuliere oplossing van de vorm

$$a_n^{(p)} = \alpha_0 n^t + \alpha_1 n^{t+1} + \dots + \alpha_l n^{t+l},$$

waarbij  $t$  de multipliciteit van 1 als oplossing van de karakteristieke vergelijking van de bijhorende homogene betrekking. De coëfficiënten  $\alpha_j$  worden berekend door de particuliere oplossing te substitueren in de recurrente betrekking.

Indien  $f(n) = cq^n$ , met  $c$  een constante, dan is

$$a_n^{(p)} = \alpha n^t q^n$$

een particuliere oplossing. Hierbij is  $t$  de multipliciteit van  $q$  in de karakteristieke vergelijking van de bijhorende homogene recurrente betrekking. Ook hier vindt men  $\alpha$  door de particuliere oplossing te substitueren in de recurrente betrekking.

**Extra Oefening 44** Laat  $a_n$  het aantal woorden van lengte  $n$  zijn met letters uit het alfabet  $\{0, 1, 2, 3\}$  waarin een oneven aantal nullen voorkomen.

- (a) Bewijs dat  $a_{n+1} = 2a_n + 4^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Zoek de waarde van een algemene term uit de rij  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .
- (c) Stel de voortbrengende functie op die bij dit probleem behoort.



**Extra Oefening 45** Een computer aanvaardt als paswoord elke rij cijfers die een even aantal maal het cijfer 0 bevat. Noem  $a_n$  het aantal paswoorden van lengte  $n$ .

(a) Bereken  $a_1$  en  $a_2$ .

(b) Bewijs dat de recurrente betrekking van  $a_n$  gegeven wordt door:

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}.$$

(c) Los de recurrente betrekking op.

**Extra Oefening 46** Men beschouwt  $n$  ( $n \geq 1$ ) cirkels in het vlak zodat

(a) elke cirkel alle andere cirkels in 2 verschillende punten snijdt;

(b) geen 3 cirkels een punt gemeen hebben.

Zij  $a_n$  het aantal gebieden waarin het vlak verdeeld wordt door deze cirkels. Bepaal een recurrente betrekking voor  $a_n$  en los deze recurrente betrekking op.

**Extra Oefening 47** Beschouw de driehoekige getallentabel met  $0, 1, 2, 3, \dots$ , langs de buitenzijden en waarbij een getal "binnenin" verkregen wordt door de som te nemen van de twee aanliggende getallen in de vorige rij en het getal dat 2 rijen erboven staat.

Het begin van de tabel ziet er dus als volgt uit:

			0				
		1		1			
	2		2		2		
3		5		5		3	
4	10		12		10		4

Noem  $a_n$  de som van de getallen in rij  $n$ , dus  $a_0 = 0$ ,  $a_4 = 40$ .

(a) Bewijs dat  $a_n$  voldoet aan de recurrente betrekking

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 2, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0, a_1 = 2.$$

(b) Los de recurrente betrekking op.

(c) Stel de voortbrengende functie op die bij dit probleem hoort.

**Extra Oefening 48** Bereken  $s_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n - 1) \cdot (2n)$ ,  $n \geq 1$ . (Hulp: Stel de recurrente betrekking op voor  $s_n$  en los deze op.)

**Extra Oefening 49** *Onderstel dat er  $n$  personen ( $n \geq 2$ ) op een receptie zijn. Elke persoon zal juist éénmaal een hand geven aan alle andere aanwezigen (en dus niet aan zichzelf).*

- (a) *Bewijs dat de recurrente betrekking voor het bepalen van het totale aantal keer dat handen werden geschud, gegeven wordt door:*

$$a_{n+1} = a_n + n .$$

- (b) *Vind de nodige beginvoorwaarde( $n$ ).*  
(c) *Los de recurrente betrekking op.*

**Extra Oefening 50** *Je beschikt over 4 symbolen  $\{0, 1, 2, 3\}$  waarmee rijen moeten gevormd worden van lengte  $n$ . In deze rijen moet minstens één 1 voorkomen. Bovendien mag de eerste 0 niet vóór de eerste 1 voorkomen (er moet geen 0 voorkomen in de rij). Zij  $a_n$  het aantal dergelijke rijen van lengte  $n$ .*

- (1) *Toon aan dat de recurrente betrekking voor dit probleem  $a_n = 4a_{n-1} + 2^{n-1}$  is, voor  $n \geq 1$ .*  
(2) *Bereken  $a_n$ , recursief gedefinieerd door deze betrekking en in de veronderstelling dat  $a_0 = 0$ .*

**Extra Oefening 51** *Los de volgende recurrente betrekkingen op:*

- (a)  $a_n = 3a_{n-1} - 4n$ ;  
(b)  $b_n = 3b_{n-1} + 3(2^n)$ ;  
(c)  $c_n = 3c_{n-1} - 4n + 3(2^n)$ .

**Extra Oefening 52** *Op een blad papier tekenen we  $n$  willekeurige driehoeken zodat elke driehoek elke andere driehoek snijdt in precies twee punten. Een snijpunt is nooit bevat in drie driehoeken. Zoek de recurrente betrekking voor het aantal gebieden waarin het blad verdeeld wordt door deze driehoeken, en los deze recurrente betrekking op.*

**Extra Oefening 53** *Zij  $a_n$  het aantal rijen van lengte  $n$ , enkel bestaande uit  $0, 1, 2$  en  $3$  zodat de som van  $2$  opeenvolgende getallen nooit deelbaar is door  $3$ . Bepaal een recurrente betrekking voor  $a_n$  en los ze op. (Merk op:  $2$  keer  $0$  achter elkaar is niet toegelaten.)*

**Extra Oefening 54** *Laat  $a_n$  het aantal woorden van lengte  $n$  zijn van letters uit het alfabet  $\{A, B, C, D\}$  en met een even aantal  $A$ 's en een even aantal  $B$ 's.*

(a) *Bewijs dat  $a_n = 2a_{n-1} + \frac{1}{2}4^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .*

(b) *Los deze recurrente betrekking op.*

(c) *Stel de voortbrengende functie op die behoort bij dit probleem.*

### 3.3 Recurrente betrekkingen en voortbrengende functies

### 3.4 Zuinig en onzuinig sorteren

### 3.5 Differentierijen

**Extra Oefening 55** *Los het volgend stelsel recurrente betrekkingen op:*

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, & n \geq 1 \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

met  $a_0 = 1$  en  $b_0 = 2$ .

*(Herleid hiertoe het stelsel tot een lineaire recurrente betrekking voor  $b_{n+1}$ , met  $n \geq 1$ )*

**Extra Oefening 56** *De Fibonacci rij wordt gedefinieerd door de recursieve betrekking  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , met als beginvoorwaarden  $f_0 = f_1 = 1$ .*

(a) *Bewijs dat het Fibonacci getal  $f_n$  even is als en slechts als  $n = 3k + 2$ , waarbij  $k \in \mathbb{N}$  (hint: beschouw  $f_{3k}$ ,  $f_{3k+1}$  en  $f_{3k+2}$ ).*

(b) *Bewijs dat elk vijfde Fibonacci getal een veelvoud is van 5.*

**Extra Oefening 57** *Gegeven is de rij  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die recursief gedefinieerd wordt door*

$$a_0 = 0, \quad ia_i = (i-1)(a_{i-1} + 1), i \geq 1.$$

*Bereken  $\sum_{i=1}^n a_i$  in functie van  $n$ .*

**Extra Oefening 58** *Los de volgende recurrente betrekking op:*

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$$