

Herhalingsoefeningen kombinatoriek

28 februari 2002

1. Op hoeveel manieren kan men één rooster van een lottoformulier invullen?
2. De Belgische telefoonnummers bestaan uit 6 cijfers, voorafgegaan door een zonennummer dat bestaat uit 3 cijfers.
 - (a) Hoeveel abonnees kunnen er ten hoogste zijn per zone?
 - (b) In hoeveel zones kan het land ten hoogste opgedeeld worden, in de veronderstelling dat het eerste cijfer van het zonennummer 0 moet zijn en het tweede cijfer geen 0 mag zijn?
3. Op een dansvloer staan 10 jongens en 10 meisjes. Elk meisje en elke jongen trekt een nummer van 1 tot 10, alle jongens hebben een verschillend nummer evenals alle meisjes. Degenen die gelijke nummers hebben vormen een danspaar. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren?
4. Op hoeveel manieren kan men het getal 20 schrijven als een som van 5 natuurlijke getallen?
5. Een groep van 20 leden overnacht in een hotel. Er zijn 3 slaapkamers beschikbaar, met respectievelijk 5, 7 en 8 plaatsen.
 - (a) Op hoeveel manieren kan de groep verdeeld worden over de drie kamers?
 - (b) Op hoeveel manieren kan dit nog als de groepsleider in de grootste kamer wil slapen?
6. Op hoeveel manieren kan men 8 kaarten trekken uit een spel van 52 kaarten zodat
 - (a) ze alle 8 van dezelfde kleur zijn?
 - (b) het aantal zwarte kaarten 2 groter is dan het aantal rode kaarten?
 - (c) er van elk van de 4 soorten juist 2 kaarten zijn?
7. Hoeveel getallen van 4 verschillende cijfers liggen tussen 3000 en 7000?
8. Een meerkeuzetoets bevat 20 vragen met elk 4 antwoordmogelijkheden. Op hoeveel manieren kan men het antwoordblad invullen, indien op elke vraag slechts 1 antwoord mag gegeven worden?

9. In 2 voetbalwedstrijden hebben 4 ploegen samen 10 doelpunten gemaakt. Hoeveel mogelijke uitslagen zijn er voor deze 2 wedstrijden?
10. Men vormt alle getallen die bestaan uit 3 verschillende oneven cijfers en rangschikt deze in stijgende volgorde.
 - (a) Welk is het rangnummer van het getal 573?
 - (b) Welk getal staat op de 43ste plaats?
 - (c) Bereken de som van al deze getallen.
11. Acht vrienden gaan samen tennissen.
 - (a) Hoeveel verschillende partijen enkelspel kunnen ze spelen?
 - (b) Hoeveel verschillende partijen dubbelspel kunnen ze spelen?
12. Hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 30000 zijn er waarin geen enkel cijfer herhaald wordt?
13. Uit hoeveel stenen bestaat een dominospel? (Elke dominosteen is verdeeld in 2 helften waarop van 0 tot 6 stippen kunnen staan. Er zijn geen twee gelijke dominostenen.)
14. Hoeveel diagonalen heeft een convexe n -hoek?
15. In een vlak liggen n verschillende punten, zodanig dat er geen drie punten op een rechte liggen.
 - (a) Hoeveel verschillende rechten worden door deze punten bepaald?
 - (b) Hoeveel verschillende driehoeken worden door deze punten bepaald?
16. Hoeveel getallen bestaan uit 6 verschillende cijfers en zijn oneven (de getallen mogen niet met 0 beginnen)?
17. Hoeveel getallen van 6 cijfers kunnen gemaakt worden met de cijfers 2, 3, 4, als elk cijfer ten minste 1 maal voorkomt?
18. Bewijs voor n even, dat

$$\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Wat wordt de betrekking voor n oneven?

19. Bepaal de coëfficiënt van x^5y^4z in $(x + y + z)^{10}$.
20. Op hoeveel manieren kunnen we 10 uitwendig gelijke knikkers verdelen over 4 verschillende dozen, indien er
 - (a) geen enkele doos leeg blijft?
 - (b) een oneven aantal knikkers in de eerste doos liggen?
 - (c) een oneven aantal knikkers in elke doos liggen?
21. Bepaal de algemene oplossing van
 - (a) $a_n + 3a_{n-1} = n^2 + 1, n \geq 1,$
 - (b) $2a_n - 4a_{n-2} = n, n \geq 2,$
 - (c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^n.$
22. Bepaal de coëfficiënt van x^{15} in $\frac{1-x^5}{1-x} \cdot e^{2x}$.
23. Bepaal de eenvoudigste vorm van de gewone voortbrengende functie van de rij (a_n) waarbij a_n achtereenvolgens als volgt wordt gedefinieerd:
 - (a) $a_n = n^2.$
 - (b) $a_n = 3^n.$
 - (c) $a_n = 2n + 1.$
24. Bepaal de 2 rijen waarvoor $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ gewoon, respectievelijk exponentieel voortbrengende functie is.
25. Bepaal de coëfficiënt van
 - (a) x^5 in $\frac{1}{(1+3x)^2}.$
 - (b) x^3 in $\frac{(1+4x)^5}{1-2x}.$
 - (c) x^8 in $(1 - 3x)^{-5}.$
 - (d) x^3 in $((5x)^{-1} - 3x)^6.$
26. Hoeveel oplossingen bezit de vergelijking $x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 100$ waarbij $x_i \in \mathbb{N}[5, 12]$ ($0 \leq i \leq 4$)?

27. Bewijs dat het aantal partities van een natuurlijk getal n als som van oneven natuurlijke getallen gelijk is aan het aantal partities van dit getal in verschillende natuurlijke getallen.
28. Bewijs dat voor het aantal wanordes d_n van $\mathbb{N}[1, n]$ geldt dat $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$.
29. Hoeveel permutaties van $\mathbb{N}[1, n]$ bestaan er zodanig dat de cijfers 1, 2 en 3 niet op hun plaats zijn gebleven?