UNIVERSITEIT GENT

Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

open-boek-gedeelte — 13 juni 2022

1. Beschouw volgende tweede orde differentiaalvergelijking met reële parameter μ

$$\ddot{y} = y^2 + 2y\dot{y} - (\mu - \dot{y} + y^2)^2 \,.$$

   (a) Schrijf de vergelijking als twee-dimensionaal systeem van eerste orde door overgang op de veranderlijken $x_1 = y$ en $x_2 = \mu - \dot{y} + y^2$.

   (b) Bepaal alle evenwichtspunten van het twee-dimensionaal systeem.

   (c) Bepaal op basis van het aantal evenwichtspunten de bifurcatiepunten en geef telkens het type bifurcatie dat er optreedt. Maak een bifurcatiediagram in het (μ, x_1)-vlak.

2. We passen de expliciete middelpuntsmethode met stapgrootte h

$$y_1 = y_0 + hf\Big(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\Big)$$

toe op de wiskundige slinger, met Hamiltoniaan en bewegingsvergelijkingen

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q \,, \qquad \dot{p} = -\sin q \,, \qquad \dot{q} = p \,.$$

   (a) Geef de waarde van de Hamiltoniaan, tot op 5 cijfers na de komma, voor de numerieke oplossing na 100 stappen met stapgrootte $h = 0.05$ voor startwaarden $p_0 = 0$ en $q_0 = 2\pi/3$.

   (b) Toon aan dat men als gewijzigde bewegingsvergelijkingen vindt:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin q \\ p \end{pmatrix} + \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} -(p^2/4 + \cos q)\sin q \\ p\cos q \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^3)$$

   en ga na of deze Hamiltoniaans zijn.

   (c) Wat zegt dit over de orde en de symplecticiteit van de expliciete middelpuntsmethode?

3. Beschouw op het interval $[-1, 1]$ het volgende probleem:

$$(1 - x^2)\, y'' - x\, y'(x) + E\,\sqrt{1 - x^2}\, y(x) = 0 \,.$$

   (a) Geef de uitdrukkingen voor $p(x)$, $q(x)$ en $w(x)$ die men bekomt als dit probleem in de vorm van de Sturm-Liouville-vergelijking wordt geschreven:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = E\, w(x)y(x) \,.$$

   (b) Bepaal voor de randvoorwaarden $(py')(-1) = 0$ en $y(1) = 0$ hoeveel eigenwaarden er tussen 1000 en 2000 zitten, en welke indices deze eigenwaarden hebben. Geef de kleinste eigenwaarde tussen 1000 en 2000 tot op 3 cijfers na de komma.