Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

open-boek-gedeelte — 22 augustus 2022

1. Noteer $\sigma_j(M)$ voor de j-de singuliere waarde van een matrix M, geordend van groot naar klein. Stel $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

   (a) Gebruik $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$ om aan te tonen dat

   $$\sigma_{j+k+1}(A+B) \leq \sigma_{j+1}(A) + \sigma_{k+1}(B). \tag{1}$$

   (b) Gebruik (1) om aan te tonen dat $|\sigma_k(C) - \sigma_k(D)| \leq \|C - D\|_2$.

   (c) Stel A' is een matrix die bekomen wordt door in A één rij of kolom te verwijderen. Gebruik (1) om aan te tonen dat $\sigma_k(A) \geq \sigma_k(A') \geq \sigma_{k+1}(A)$.

2. Beschouw het systeem

   $$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -|x_1| + x_2 \\ \dot{x_2} &= \mu + x_1^2 - x_2 \end{aligned}$$

   (a) Bepaal de evenwichtspunten van het systeem in functie van de parameter μ.

   (b) Bepaal wanneer de evenwichtspunten hyperbolisch zijn, en bepaal voor de hyperbolische evenwichtspunten ook de stabiliteit in functie van de parameter μ.
   Tip: Beschouw apart de gevallen $x_1 > 0$ en $x_1 < 0$.

   (c) Bepaal de bifurcatiepunten (μ^*, x_1^*, x_2^*) en maak een bifurcatiediagram in het (μ, x_1)-vlak. Welke bifurcatie-types vinden plaats op deze bifurcatiepunten?

3. Beschouw op het interval $[-1, 1]$ het volgende randwaardenprobleem:

   $$(1-x^2)\, y''(x) + x\, y'(x) = \lambda\, (1-x^2)\, y(x)\,,$$

   met $y(-1) = (py')(-1)$ en $y(1) = (py')(1)$, waarbij we de eigenwaarden λ willen bepalen.

   (a) Argumenteer dat er enkel oplossingen $y(x)$ bestaan voor negatieve waarden λ, door het probleem in de vorm van de Sturm-Liouville-vergelijking te schrijven

   $$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = E\, w(x)y(x)\,.$$

   (b) Bepaal hoeveel eigenwaarden λ er tussen -500 en -300 zitten. Geef de kleinste eigenwaarde tussen -500 en -300 tot op 7 cijfers na de komma.