UNIVERSITEIT GENT

Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

open-boek-gedeelte — 13 juni 2023

(4 pt) 1. Beschouw het systeem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x+1)(x+y)(x^2+1-y)\\ \dot{y} &= \mu - y\end{aligned}$$

(a) Bepaal de evenwichtspunten en geef aan hoe het aantal verandert in functie van de parameter μ.

(b) Bepaal voor de evenwichtspunten op de rechte $x = -1$ wanneer ze hyperbolisch zijn en, indien hyperbolisch, ook de stabiliteit in functie van de parameter μ.

(c) Teken in het (μ, x)-vlak de evenwichtspunten, en bespreek aan de hand van deze tekening en de veranderingen in het aantal evenwichtspunten welke types bifurcatie hier zouden kunnen optreden. Wat zijn de bifurcatiepunten?

(3 pt) 2. Beschouw het Hamiltoniaans systeem met als bewegingsvergelijkingen

$$\dot{p} = \frac{-2\,q}{(q^2+1)^2}\,, \qquad \dot{q} = p$$

en de startwaarden $p_0 = 1$ en $q_0 = 0$.

(a) Stel dat het systeem begint met de gegeven startwaarden. Bepaal de veralgemeende coördinaat q als voor het toegevoegde moment geldt $p = 0$.

(b) Gebruik de tweede Störmer-Verlet methode om elf stappen met stapgrootte $h = 0.5$ te nemen vanaf de gegeven startwaarden, en geef de maximale afwijking van de Hamiltoniaan hierbij tot op 6 cijfers na de komma.

(c) Bepaal voor de tweede Störmer-Verlet methode de gewijzigde bewegingsvergelijkingen tot en met $\mathcal{O}(h)$. Zijn de gewijzigde bewegingsvergelijkingen opnieuw Hamiltoniaans? Zal dit ook zo zijn voor hogere machten van h en waarom of waarom niet?

(2 pt) 3. Gebruik Prüfer-gebaseerde shooting-methoden om, voor het eigenwaardeprobleem

$$x\,y'' - y' + E\,x^3\,y = 0\,,$$

op het interval $[1,2]$ met randvoorwaarden $y'(1) = 0$ en $y'(2) = 0$, te bepalen hoeveel eigenwaarden er tussen -100 en 100 zitten, en welke indices deze eigenwaarden hebben.

(2 pt) 4. Voor een matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, noteer $\sigma_j(A)$ voor de j-de singuliere waarde, geordend van groot naar klein, waarbij $\sigma_j(A) = 0$ als $j > \min(m,n)$.

Met A_ν gedefinieerd zoals in Stelling 2.5.2, geldt er

$$\sigma_{\nu+1}(A) = \inf_{\substack{B\in\mathbb{C}^{m\times n}\\ \mathrm{rang}(B)\le\nu}} \|A-B\|_2 = \|A-A_\nu\|_2\,.$$

Veronderstel nu dat $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(a) Toon aan dat

$$\sigma_{j+k+1}(A+B) \leq \sigma_{j+1}(A) + \sigma_{k+1}(B). \tag{1}$$

U mag hierbij gebruiken dat $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

(b) Gebruik (1) om aan te tonen dat $|\sigma_k(C) - \sigma_k(D)| \leq \|C - D\|_2$.