

- (3 pt) 1. Beschouw de harmonische oscillator met Hamiltoniaan en bewegingsvergelijkingen

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{k^2}{2}q^2, \quad \dot{p} = -k^2 q, \quad \dot{q} = p \quad (k > 0),$$

en de transformatie $\varphi: (p, q) \mapsto (I, \theta)$ waarbij

$$p = \sqrt{2kI} \cos \theta, \quad q = \sqrt{\frac{2I}{k}} \sin \theta.$$

- (a) Toon aan dat de transformatie φ symplectisch is.
(b) Toon aan dat I een eerste integraal is.
(c) Welke vorm hebben de banen in de coördinaten (I, θ) ?
- (3 pt) 2. Beschouw het volgende stelsel
- $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - \mu \end{cases}$$
- (a) Bepaal de evenwichtspunten en hoe het aantal verandert in functie van μ .
(b) Bepaal voor de evenwichtspunten op de rechte $x_1 = 0$ wanneer ze hyperbolisch zijn en, indien hyperbolisch, ook de stabiliteit in functie van de parameter μ .
(c) Bepaal de bifurcatiepunten (μ^*, x_1^*, x_2^*) en maak een bifurcatiediagram in het (μ, x_1) -vlak. Welke bifurcatie-types vinden plaats op deze bifurcatiepunten?
- (2 pt) 3. Beschouw de matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ met singuliere waarden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$.

- (a) Toon aan dat

$$\sigma_\nu = \sup_{\substack{W \subset \mathbb{C}^n \\ \dim(W) = \nu}} \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_2 = 1}} \|Aw\|_2.$$

- (b) Bepaal k zodat volgende eigenschap geldt:

$$\sigma_\nu = \inf_{\substack{W \subset \mathbb{C}^n \\ \dim(W) = k}} \sup_{\substack{w \in W \\ \|w\|_2 = 1}} \|Aw\|_2.$$

- (2 pt) 4. Beschouw op het interval $[1, 2]$ met randvoorwaarden $y'(1) = 0$ en $y'(2) = 0$ het probleem

$$-x y'' - 3y' + x y = E x y.$$

- (a) Geef de uitdrukkingen voor $p(x)$, $q(x)$ en $w(x)$ die men bekomt als dit probleem in de vorm van de Sturm-Liouville-vergelijking wordt geschreven.
(b) Toon aan dat $E_0 = 1$ de kleinste eigenwaarde van het eigenwaardeprobleem is.