

1. (5 pt) Beschouw het onderstaand dynamisch systeem met parameter μ .

$$\begin{cases} \dot{x} &= (x - \mu)^2 + (y - 1)^2 - \mu^2 \\ \dot{y} &= (y - x - 1)(y - \mu) \end{cases}$$

- (a) Bespreek hoe de curven waarlangs $\dot{x} = 0$ en de curven waarlangs $\dot{y} = 0$ er zullen uitzien. Verklaar hierbij ook telkens wat de invloed van μ hierop zal zijn.
- (b) Bepaal de aard en stabiliteit van alle evenwichtspunten in functie van μ .
- (c) Teken het bifurcatiediagram in het (μ, x) -vlak en bepaald het type van de bifurcatiepunten zo specifiek mogelijk. Leg bij elk van deze bifurcatiepunten een verband met jouw antwoord bij deelvraag (a).
2. (5 pt) Beschouw een (Hamiltoniaans) systeem van de vorm

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= f(t, p, q) \quad (= -\nabla_q H) \\ \frac{dq}{dt} &= g(t, p, q) \quad (= \nabla_p H) \end{aligned}$$

Voor het oplossen van deze bewegingsvergelijkingen, wenden we ons tot onderstaande gepartitioneerde Runge-Kutta-methode:

$$\begin{aligned} p_{1/2} &= p_0 + \frac{h}{2} f\left(t_0 + \frac{h}{2}, p_{1/2}, q_0\right) \\ q_{1/2} &= q_0 + \frac{h}{2} g\left(t_0, p_{1/2}, q_0\right) \\ p_1 &= p_{1/2} + \frac{h}{2} f\left(t_0 + h, p_1, q_{1/2}\right) \\ q_1 &= q_{1/2} + \frac{h}{2} g\left(t_0 + \frac{h}{2}, p_1, q_{1/2}\right) \end{aligned}$$

We zullen deze methode toepassen op een systeem met Hamiltoniaan

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + q + \alpha pq.$$

Dit resulteert in de gewijzigde bewegingsvergelijkingen (Dit hoeft je niet aan te tonen.)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= -1 - \alpha \tilde{p} + \frac{h}{4}(\alpha^2 \tilde{p} + \alpha) - \frac{h^2}{12}(\alpha^3 \tilde{p} + \alpha^2) + \mathcal{O}(h^3) \\ \dot{\tilde{q}} &= \tilde{p} + \alpha \tilde{q} - \frac{h}{4}(\alpha^2 \tilde{q} + 2\alpha \tilde{p} + 1) + \frac{h^2}{24}(2\alpha^3 \tilde{q} + 5\alpha^2 \tilde{p} + 3\alpha) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

- (a) Geef de Butcher-tableaus die bij de bovenstaande PRK-methode horen. Is de methode symplectisch?
- (b) Bepaal de orde van de methode.
- (c) Is de gewijzigde bewegingsvergelijking Hamiltoniaans? Bepaal indien mogelijk de Hamiltoniaan $\tilde{H}$ t.e.m. de termen h^2 .
- (d) Pas nu de gegeven methode toe op de oorspronkelijke bewegingsvergelijking voor het probleem met $\alpha = 0.5$, $h = 0.01$ en $(p(0), q(0)) = (1, 1)$ over het interval $[0, 10]$. Verklaar het al dan niet constant zijn van H en $\tilde{H}$ langs de oplossing. Illustreer dit door een duidelijke plot, met logaritmische schaal, van zowel $|H - H_0|$ als $|\tilde{H} - \tilde{H}_0|$ langs de oplossing.